

# CERT

N90-28020

Unclas  
66/34 0304080

(CERT-1/334700-DERI-GAN) SOLUTION OF EULER  
EQUATIONS USING FINITE ELEMENT METHOD AND  
THE KINETIC DECOMPOSITION OF THE FLOWS:  
STUDY OF THE SELF-ADAPTATION OF THE GRID AND  
OF THE CALCULATION FIELD FINAL REPORT

*office national d'études  
et de recherches aérospatiales*

*centre d'études et de recherches  
de l'école nationale supérieure  
de l'aéronautique et de l'espace à toulouse*

## RAPPORT FINAL N° 1/3347.00/DERI-GAN

*Résolution par éléments finis des équations d'Euler par une méthode  
de décomposition cinétique des flux : étude de l'auto-adaptativité  
du maillage et du domaine de calcul.*

*département d'études et de recherches en informatique*

*Centre National de la Recherche Scientifique - 31055 Toulouse cedex - tél. 81.55.71.111 - télex 521 535 F. 11.11*

87480

RECEIVED BY.

ESA - IRS

01 GIU. 1990

DATE:

DOAF NO.

003393

PROCESSED BY

☐ NASA DTI FACILITY

☐ ESA - IRS

☐ AIAA

M5085-6/n°4-3347

1-201

O.N.E.R.A

**CENTRE D'ETUDES ET DE RECHERCHES DE TOULOUSE**

2, Avenue Edouard Belin - B.P. 4025  
31055 - TOULOUSE CEDEX

Téléphone : 61.55.71.11 - Télécopie : 61.55.71.72

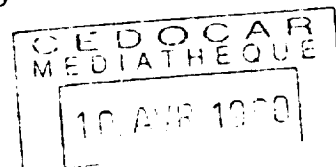
**DEPARTEMENT D'ETUDES ET DE RECHERCHES EN INFORMATIQUE**  
**GROUPE D'ANALYSE NUMERIQUE**

***Françoise BOURDEL***

**RAPPORT FINAL N° 1/3347.00/DERI-GAN**

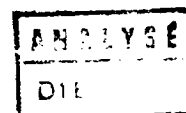
*Résolution par éléments finis des équations d'Euler par une méthode  
de décomposition cinétique des flux : étude de l'auto-adaptativité  
du maillage et du domaine de calcul.*

Convention DRET n° 89002.10



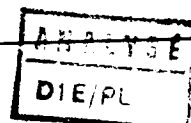
Janvier 1990

MS08S-6/n°1-3347



# FICHE D'IDENTIFICATION

<b>ORGANISME EMETTEUR</b>  O.N.E.R.A. --- CENTRE D'ETUDES ET DE RECHERCHES DE TOULOUSE --- C.E.R.T. COMPLEXE AEROSPATIAL 2, avenue Edouard Belin B.P. 4025 31055 - TOULOUSE CEDEX		<b>CLASSIFICATION</b>		
		Secret Militaire		Secret Industriel
		Titre : NC		
		Fiche : NC		
		Document : NC		
<b>Département</b> INFORMATIQUE-GAN		Numéro de la fiche programme		Service de l'état chargé de l'exécution du contrat
		T 314 A		DRET-G6
				Numéro du contrat
				89002.10
<b>TITRE</b> <i>Résolution par éléments finis des équations d'Euler par une méthode de décomposition cinétique des flux : étude de l'auto-adaptation du maillage et du domaine de calcul.</i>				
<b>AUTEUR(S) : Françoise BOURDEL</b> (Personnes physiques)				
<b>DATE</b>	<b>N° d'origine du document</b>	<b>Nombre de</b>		
		<b>Pages</b>	<b>Figures</b>	<b>Réf. Bibliographiques</b>
Janvier 1990	1/3347.00/DERI-GAN	99		6
<b>RESUME D'AUTEUR</b>  <p>La méthode de décomposition cinétique des flux, avec approximation de type Galerkin discontinu permet de résoudre efficacement les équations d'Euler en 2D, et a été testée dans un cas simplifié en 3-D. En vue d'améliorer ses performances, on étudie l'élaboration d'une stratégie d'auto adaptation du maillage et/ou du domaine de calcul, utilisant un critère "entropique" spécifique à la méthode (il s'agit du reste de l'inéquation d'entropie, qui mesure la dissipation) et exploitant la structuration des éléments finis (espace/temps).</p>				
<b>NOTIONS D'INDEXAGE :</b> Equations d'Euler - Flux splitting - k diagonalisation - Boltzmann - Diagonalisation cinétique - Eléments finis - Galerkin discontinu - Systèmes hyperboliques diagonalisables/symétrisables - Maillage auto-adaptatif - Critère entropique de raffinement de maillage				



LISTE DE DIFFUSION

du document C.E.R.T. n° 1/3347/DERI-GAN

Destinataires du document et de la fiche d'identification

Extérieurs à l'O.N.E.R.A.

DRET, SDR/G6.4  
A l'attention de Mademoiselle LEGRAND  
26 bd. Victor, 00460 - ARMEES

20 ex.

Intérieurs à l'O.N.E.R.A.

D	1 ex.
CP	1 ex.
DERI	5 ex.
Groupe de Recherche	15 ex.
QA	1 ex.
OE	1 ex.
OR	1 ex.

Destinataires de la fiche d'identification seule

Extérieurs à l'O.N.E.R.A.

Intérieurs à l'O.N.E.R.A.

DERA - DERAT - DERI - DERMO - DERO - DERMES - DERTS - ONERA/DED

## SOMMAIRE

1 - INTRODUCTION : OBJET DE L'ETUDE	7
2 - INTERET DE L'ETUDE	8
2.1 - Caractéristiques de la méthode de décomposition cinétique des flux	8
2.2 - Historique et résultats acquis	9
2.2.a - Rappel sur les propriétés des systèmes hyperboliques conservatifs	9
2.2.b - Rôle de la fonction $\Sigma^*(\vec{\psi}, \vec{n})$	10
2.2.c - Notion de $\vec{k}$ -diagonalisation pour un système non linéaire	11
2.3 - L'algorithme d'auto-adaptation du maillage	17
2.3.1 - Choix du critère spécifique de raffinement	17
2.3.2 - Stratégie d'auto-adaptation	18
3 - Déroulement de l'étude	19
3.1 - Etude monodimensionnelle	19
3.2 - Etude bidimensionnelle	21
3.2.1 - Construction du maillage	21
3.2.2 - Raffinement auto adaptatif 2D	22
3.3 - Etude tri-dimensionnelle	23
4 - Résultats numériques	24
4.1 - Le tube à chocs de SOD monodimensionnel	24
4.2 - Les tests bidimensionnels	26

4.2.1 - Tube de SOD	26
4.2.2 - Cas de la rampe inclinée	26
4.2.3 - Objet 2D de forme axisymétrique avec incidence de 2°	27
4.3 - Résultats 3D	28
5 - Conclusions et perspectives	29
Bibliographie	31
Annexes :	
A1 Explicitation de la décomposition cinétique des flux en dimension 1	33
A2 Etablissement de l'expression du critère entropique d'adaptation de maillage - Lien avec la stabilité	37
A3 Expression des critères de raffinement et déraffinement en monodimensionnel	43
A4 Semi-implicite locale du schéma Galerkin discontinu. Planches.	45 48

## 1 - INTRODUCTION : OBJET DE L'ETUDE

Au cours des deux dernières années, le Groupe d'Analyse Numérique du CERT a développé une méthode d'approximation de type Galerkin discontinu pour la résolution de certains systèmes hyperboliques non linéaires dits "symétrisables" [1, 2, 3].

Cette méthode, issue de précédents travaux sur les formulations variationnelles en entropie, généralise aux systèmes considérés des résultats connus concernant les systèmes hyperboliques linéaires symétriques [1, 3].

Ces systèmes symétrisables sont tels que le flux de la forme polaire de l'entropie, fonction des variables entropiques (intensives) admet une décomposition en parties convexe et concave, globale.

C'est entre autres le cas des équations d'Euler, pour lesquelles on obtient de façon "naturelle" cette décomposition, en écrivant les équations en variables entropiques comme les moments des équations de Boltzmann par rapport à un vecteur "de collision"  $\vec{\kappa}$  [1, 2, 3].

Ces propriétés justifient les autres dénominations de la méthode de Galerkin discontinue comme méthode de "Flux Splitting" (décomposition cinétique des flux) ou méthode de "  $\vec{\kappa}$  - diagonalisation".

L'approximation "éléments finis" de d° 0 choisie (équivalant à des volumes finis) est implicite, et peut être aisément explicitée moyennant l'établissement d'une condition de stabilité sur le pas de temps, de type "CFL", qui s'interprète comme une condition de dissipation du schéma explicite [4].

De très bons résultats, tant théoriques que numériques, ayant été obtenus en monodimensionnel comme en bidimensionnel, - permettant des comparaisons concluantes avec d'autres méthodes - [3] - il s'agissait en 1989 d'améliorer les performances de la méthode, en précision et temps calcul, par l'élaboration, dans le cadre bidimensionnel instationnaire, d'une stratégie d'adaptation automatique de maillage, et éventuellement de domaine, qui soit spécifique à cette approximation (exploitant notamment le fait qu'elle peut opérer sur des maillages de structure absolument quelconque, en espace comme en temps). Au préalable devait se

poursuivre l'approfondissement des tests de critères d'auto-adaptation en monodimensionnel.

D'autre part, l'implémentation tridimensionnelle de la méthode ayant été réalisée auparavant dans une configuration simplifiée, en 1989 devait être développée totalement l'approximation 3-D (nécessitant l'écriture des pré-processeurs généraux de maillage "automatique" 3-D) avec test sur une géométrie simple (tout ceci en vue d'utiliser ultérieurement l'algorithme spécifique d'auto-adaptation de maillage ou de domaine, en 3-D).

Parallèlement à ces développements devaient se poursuivre les travaux de recherche fondamentale quant aux approximations de type Galerkin (avec éléments finis discontinus), d'ordre supérieur, et à l'établissement d'une méthode de type "Petrov-Galerkin" fondée également sur la  $\mathbf{E}$ -diagonalisation des équations d'Euler.

## 2 - INTERET DE L'ETUDE

### 2.1 - Caractéristiques de la méthode de décomposition cinétique des flux

La méthode de Flux Splitting décrite est "naturelle" car d'une part elle exploite les propriétés intrinsèques au système hyperbolique - dont essentiellement la convexité - d'autre part, elle permet une interprétation statistique de la viscosité numérique (au sens moléculaire) : le système peut en effet, par analogie avec Boltzmann, s'écrire comme moyenne par rapport à un vecteur "de collision"  $\mathbf{E}$  de l'équation hyperbolique scalaire linéaire.

D'ailleurs dans le cas linéaire symétrique, la décomposition de la fonction  $\Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n})$ , "primitive" des flux, en partie convexe et concave  $(\Sigma^+, \Sigma^-)$  équivaut strictement à la décomposition "classique" des flux selon le signe des valeurs propres de jacobien :

$$(f_{ni}^+)^+, (f_{ni}^+)^- \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} J_{(f_{ni}^+)^+} & \alpha & \text{des v.p.} & > 0 \\ J_{(f_{ni}^+)^-} & & & < 0 \end{matrix}$$

De plus :

cette méthode permet de généraliser en non linéaire la notion de "totale diagonalisation".



En outre la décomposition en  $\sum^{*+} \sum^{*-}$  se fait par un calcul algébrique sans détermination de valeurs propres, sans évaluation de max ou min (facilité de mise en oeuvre, temps calcul ...).

L'approximation du type "volumes finis" effectuée sur le schéma permet de retrouver le schéma décentré du 1er ordre "classique" (schéma de Courant) sur un maillage structuré.

## 2.2 - Historique et résultats acquis

### 2.2.a - Rappels sur les propriétés des systèmes hyperboliques conservatifs

Le système initial s'écrit sous forme conservative, au sens des distributions:

$$(1) \quad \begin{array}{l} d_t \vec{w} + d_i \vec{g}_i(\vec{w}) = \vec{0} \\ \text{dans } Q = [0, T] \times \Omega \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{w}(t, x) \in \mathbb{R}^m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Lorsqu'on effectue le changement de variable "entropique"

$$\vec{w} \longleftrightarrow \vec{\varphi} = \vec{\nabla}_{\vec{w}} S(\vec{w}) \quad \text{qui est bijectif -}$$

S étant une entropie admissible strictement convexe pour (1), on obtient l'écriture équivalente sous forme "intensive" en variable entropique : (non conservative)

$$(2) \quad d_t \vec{f}^0(\vec{\varphi}) + d_i \vec{f}^i(\vec{\varphi}) = \vec{0}$$

On vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\vec{f}^0(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^*(\vec{\varphi}) = \vec{w}(\vec{\varphi})}$$

où  $S^*(\vec{\varphi}) = S_{\max}(\varphi_w - S(w))$  est la transformée de Legendre, ou polaire, de  $S(w)$ . C'est une fonction strictement convexe de  $\vec{\varphi}$ .

$$\boxed{\vec{f}^i(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^{i*}(\vec{\varphi}) \quad i=1, \dots, n}$$

où  $S^{i*}$  est la polaire, ou transformée de Legendre, du  $i^e$  flux d'entropie  $s^i$

NB : pour Euler  $S^i(w) = \lambda^i S(w) \quad i=1, \dots, n$   
 $\lambda^i$   $i^e$  composante de la vitesse.

On a alors des relations de polarité suivantes, suffisant à définir  $S^*$  et  $S^{i*} \quad i=1, \dots, n$ :

$$(3) \quad \begin{cases} S(\vec{w}(\vec{\varphi})) + S^*(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} \cdot \vec{w}(\vec{\varphi}) \\ S^i(\vec{w}(\vec{\varphi})) + S^{i*}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} \cdot \vec{f}^i(\vec{\varphi}) \quad i=1, \dots, n \end{cases}$$

(  $\vec{g}^i(\vec{w}(\vec{\varphi})) = \vec{f}^i(\vec{\varphi})$  )

On définit alors la fonction

$$\Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = S^*(\vec{\varphi}) n_t + S^{i*}(\vec{\varphi}) \cdot n_i$$

$\vec{n} = (n_t, (n_i)_{i=1, \dots, n})$  étant généralement la normale espace temps unitaire sortante à une frontière ou ligne de discontinuité intérieure au domaine. Alors grâce à (3) on a :

$$\vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} \Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \vec{w}(\vec{\varphi}) \cdot n_t + \vec{f}^i(\vec{\varphi}) \cdot n_i$$

c'est la somme des flux de la variable non conservative par rapport à .

### 2.2.b - Rôle de la fonction $\Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n})$ :

On utilise la convention habituelle :

$$\vec{w}^d = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^*(\vec{\varphi}^d) \quad \vec{n} \quad \vec{w}^e = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^*(\vec{\varphi}^e)$$

valeurs "intérieures"                      valeurs "extérieures"                      relativement à  $\vec{n}$

L'inégalité suivante :

$$(4) \quad \left( S(\vec{w}^e) - S(\vec{w}^d) \right) n_t + \left( S^i(\vec{w}^e) - S^i(\vec{w}^d) \right) n_i - \vec{\nabla}_{\vec{w}} S(\vec{w}^e) \cdot \left( (\vec{w}^e - \vec{w}^d) \cdot n_t + (g^i(\vec{w}^e) - g^i(\vec{w}^d)) n_i \right) \leq 0$$

est désormais reconnue pour permettre une description aisée des conditions aux limites : sur une discontinuité intérieure au domaine (les relations de Rankine et Hugoniot étant vérifiées) elle équivaut à l'inéquation d'entropie.

Or cette inégalité est toujours strictement équivalente à la suivante :

$$(5) \quad \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) \cdot (\vec{\varphi}^d - \vec{\varphi}^e) \leq 0$$

qui n'est autre qu'une inégalité de convexité locale pour  $\Sigma^*$  en  $\vec{\varphi}^d$ . D'où l'importance de la convexité de  $\Sigma^*$ , dont on montre également (cf. [1]) qu'elle est étroitement liée à la notion de caractéristiques.

### 2.2.c - Notion de $\vec{k}$ - diagonalisation pour un système non-linéaire

Définition : (cf. [3])

On dira que (2) - ou sa forme équivalente (1) - est "totalement diagonalisable" si et seulement si il existe un vecteur  $\vec{k}(\eta, u)$  dans  $\mathbb{R}^m$ , paramétré en fonction de  $(\eta, u) \in E = E \times \mathbb{R}^n$ , variables d'état indépendantes de  $t$  et  $x$ , tel que la résolution de (2) soit équivalente à celle de :

$$\int_E \vec{k}(\eta, u) \cdot (\partial_t \theta + \partial_i (u^i \theta)) = 0$$

avec la notation :  $\int_E h = \int_E \left( \int_{\mathbb{R}^m} h(\eta, u) du \right) d\eta$

Alors : si  $L(\theta)$  est une entropie strictement convexe pour l'équation scalaire

$\partial_t \theta + \partial_i (u^i \theta) = 0$ ,  $L'(\theta) = u^i L_i(\theta)$  est le 1<sup>er</sup> flux d'entropie associé et on obtient :

$\theta = L'^{-1}(\vec{k} \cdot \vec{\varphi})$  dérivée de la polaire d'entropie, qui équivaut à :

$$\vec{k} \cdot \vec{\varphi} = L'(\theta)$$

Dans le cas des équations d'Euler mono, bi ou tri-dimensionnelles ( $n \leq 3$ )

$m=n+2$  et :

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} p \\ \rho \lambda_1 \\ \rho \lambda_2 \\ \rho \lambda_3 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \rho \lambda_1 \\ p + \rho \lambda_1^2 \\ \rho \lambda_1 \lambda_2 \\ \rho \lambda_1 \lambda_3 \\ (\rho e + p) \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} \rho \lambda_2 \\ \rho \lambda_1 \lambda_2 \\ p + \rho \lambda_2^2 \\ \rho \lambda_2 \lambda_3 \\ (\rho e + p) \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_3 = \begin{pmatrix} \rho \lambda_3 \\ \rho \lambda_1 \lambda_3 \\ \rho \lambda_2 \lambda_3 \\ p + \rho \lambda_3^2 \\ (\rho e + p) \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} p \text{ est la pression} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ les composantes de la vitesse} \\ e \text{ l'énergie totale massique} \end{cases}$

$$s = \rho \log \frac{p}{\rho^\gamma} \text{ est l'entropie "physique"}$$

Alors (par analogie avec les équations de Boltzmann) si on choisit :

$$\vec{k}(\eta, u) = \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{2} + \eta^\delta \end{pmatrix}$$

où :

$$\frac{1}{\delta} + \frac{n}{2} = \frac{1}{(\gamma-1)}$$

loi des gaz polytropiques de constante  $\gamma$

- La fonction  $g(\eta) = \eta^\delta$  donne l'équation d'état (en la modifiant on peut étendre ces résultats aux gaz réactifs).

Le système des équations d'Euler apparaît comme système des moments relativement à  $\vec{k}$  de l'équation scalaire linéaire.

$$\begin{cases} \eta \in \mathbb{R}^+ = E \\ \mu = (u_1, u_2, u_3) - \text{vitesses particulières} - \mu \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

On choisit  $L^*(\vec{\psi}) = e^{\vec{k} \cdot \vec{\psi}}$  qui permettra de trouver pour entropie  $(S + \gamma p)$

On obtient les expressions suivantes :

### Cas général

$$\vec{w} = \int_E \vec{k} d\eta = \vec{f}^0(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^*(\vec{\varphi})$$

$$\begin{cases} \vec{f}^i(\vec{\varphi}) = \int_E u^i \vec{k} d\eta = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^{i*}(\vec{\varphi}) \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$S^*(\vec{\varphi}) = \int_E L^*(\vec{k}, \vec{\varphi})$$

$$\begin{cases} S^{i*}(\vec{\varphi}) = \int_E u^i L^*(\vec{k}, \vec{\varphi}) \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$\vec{w} = \int_{\eta>0} \left[ \int_{R^n} \vec{k}(\eta, u) e^{\vec{k} \cdot \vec{\varphi}} du \right] d\eta$$

$$\begin{cases} \vec{f}^i(\vec{\varphi}) = \int_{\eta>0} \left[ \int_{R^n} u^i \vec{k} e^{\vec{k} \cdot \vec{\varphi}} du \right] d\eta \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$S^*(\vec{\varphi}) = \int_{\eta>0} \left[ \int_{R^n} e^{\vec{k} \cdot \vec{\varphi}} du \right] d\eta$$

$$\begin{cases} S^{i*}(\vec{\varphi}) = \int_{\eta>0} \left[ \int_{R^n} u^i e^{\vec{k} \cdot \vec{\varphi}} du \right] d\eta \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S(\vec{w}(\vec{\varphi})) &= \int_E L(\vec{\varphi}) = \int_E (\vec{k} \cdot \vec{\varphi}) \theta - L^*(\vec{k}\vec{\varphi}) & S(\vec{w}(\vec{\varphi})) &= \int_{\eta>0} \left[ \int_{R^n} (\vec{k}\vec{\varphi} - 1) e^{\vec{k}\vec{\varphi}} du \right] d\eta \\
 \left[ S^i(\vec{w}(\vec{\varphi})) \right]_{i=1, \dots, n} &= \int_E u^i L(\vec{\varphi}) = \int_E u^i (\vec{k}\vec{\varphi}) \theta - L^*(\vec{k}\vec{\varphi}) & \left[ S^i(\vec{w}(\vec{\varphi})) \right]_{i=1, \dots, n} &= \int_{\eta>0} \left[ \int_{R^n} u^i (\vec{k}\vec{\varphi} - 1) e^{\vec{k}\vec{\varphi}} du \right] d\eta
 \end{aligned}$$

Toutes les quantités relatives au système non linéaire apparaissent comme moyennes des quantités correspondantes pour l'équation scalaire linéaire.

L'expression de  $\Sigma^*$  est alors :

$$\Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_E (n_t + u^i n_i) \cdot L^*(\vec{k} \cdot \vec{\varphi})$$

qui se décompose en :

$$\begin{cases}
 \Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_E \max(0, n_t + u^i n_i) L^*(\vec{k}\vec{\varphi}) & \text{partie convexe} \\
 \Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_E \min(0, n_t + u^i n_i) L^*(\vec{k}\vec{\varphi}) & \text{partie concave}
 \end{cases}$$

Pour les flux (gradients) on a les expressions associées :

$$\vec{F}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_E (n_t + u^i n_i) \vec{k} \theta = \vec{F}^+(\vec{\varphi}, \vec{n}) + \vec{F}^-(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} \Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n})$$

$$\begin{cases}
 \vec{F}^+(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} \Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_E \max(0, n_t + u^i n_i) \vec{k} \theta \\
 \vec{F}^-(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} \Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_E \min(0, n_t + u^i n_i) \vec{k} \theta
 \end{cases}$$

Cette décomposition est bien strictement convexe/concave car :

$\mathcal{J}_{\vec{F}^+} = \text{Hessien}(\Sigma^{*+})$  qui est une matrice définie positive (négative) grâce à la stricte

$(\mathcal{J}_{\vec{F}^-} = \text{Hessien}(\Sigma^{*-}))$   
convexité de  $\Sigma^{*+}$ .

L'intérêt de cette écriture réside en ce qu'on diagonalise totalement le système sans avoir à déterminer de valeurs propres. D'autre part, il n'est pas non plus nécessaire d'évaluer, arête par arête, le max ou le min de  $(0, m_t + u^i m_i)$ .

En effet, on a:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} \Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_{\mathbb{E}} (m_t + u^i m_i)^{(\vec{\varphi})} \vec{k} \cdot \vec{\varphi} \quad \text{qui peut s'écrire: } \int_{\mathbb{E}^{(\vec{\varphi})}} (m_t + u^i m_i) \vec{k} \cdot \vec{\varphi}$$

$$\text{où } \mathbb{E}^{(\vec{\varphi})} = \mathbb{E} \times \left\{ u = (u^i) \in \mathbb{R}^n : m_t + u^i m_i \begin{matrix} \leq 0 \\ (\geq 0) \end{matrix} \right\}$$

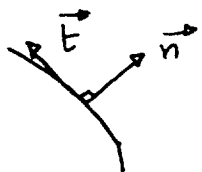
On peut montrer sur l'exemple des équations d'Euler que ces intégrales se calculent "algébriquement" par un changement de variable ramenant l'intégration à un demi-espace :

supposons  $n=2$  et plaçons-nous sur les faces verticales correspondant à  $n_t = 0$  (en pratique nous utilisons des éléments "droits" en temps).

alors

$$\Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_{\eta > 0} \left( \int_{\mathbb{R}^2} (u m_x + v m_y) e^{\vec{k} \cdot \vec{\varphi}} du dv \right) d\eta$$

Si on effectue un changement de repère pour se placer en repère normal (il s'agit d'une rotation).



$$\begin{cases} u = u' m_x - v' m_y \\ v = v' m_x + u' m_y \end{cases}$$

et un changement de variable sur  $\vec{\varphi}$  :

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_m \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_e \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \varphi_m = \zeta_m \\ \zeta_1 = \varphi_1 m_x + \varphi_2 m_y \\ \zeta_2 = \varphi_2 m_x - \varphi_1 m_y \\ \varphi_e = \zeta_e \end{pmatrix}$$

$$\text{alors: } \Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_{\eta > 0} \left( \int_{\mathbb{R}^2} u' e^{\vec{k}(\eta, (u', v'))} \cdot \vec{\zeta} du' dv' \right) d\eta$$

d'où 
$$\Sigma^{*(\vec{r})}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \int_{\eta > 0} \left( \int_{\substack{u' < 0 \\ (u' > 0)}} u' e^{k \cdot \vec{r}} du' dv' \right) d\eta$$

de façon évidente,

et ces intégrales s'explicitent "facilement". Pour obtenir les flux on dérive l'expression obtenue.

Sur chaque élément, avec le choix fait pour  $L^*$ , on a une seule fonction résidu "erf" à calculer :

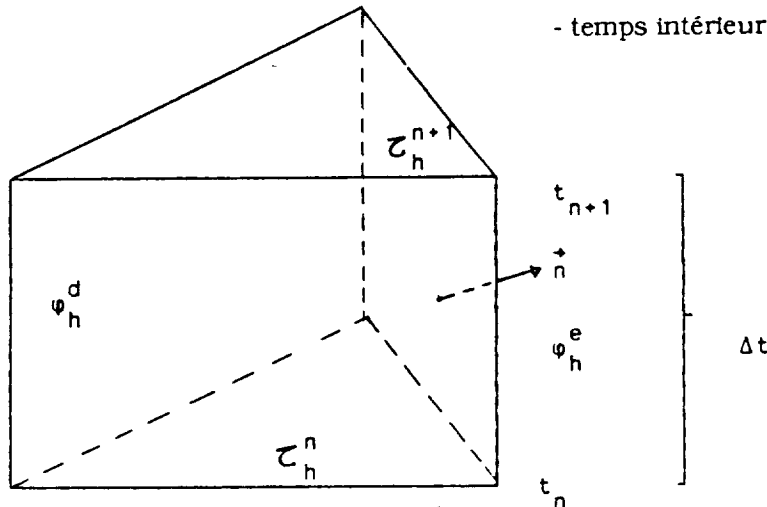
$$\begin{cases} \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = -\text{erf}(-x) \\ \text{où } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

Le schéma numérique utilisé est le suivant :

$n=2 : \omega_h = [t_n, t_{n+1}] \times \mathcal{C}_h$

est un élément fini espace

- temps intérieur à  $Q = [0, T] \times \Omega$



$\vec{\zeta}_h$  fonction test et  $\vec{\varphi}_h$  fonction approximée, sont continues par morceaux, à discontinuités localisées sur les  $\partial\omega_h$

$\forall \zeta_h$  vérifiant  $\text{supp } \zeta_h \subset \omega_h :$

$$\int_{\omega_h} \underbrace{\vec{\zeta}_h (d_t \vec{f}(\vec{\varphi}) + d_i \vec{f}(\vec{\varphi}))}_{\text{équations}} + \int_{\delta\omega_h} \underbrace{\vec{\zeta}_h (\vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_h^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_h^d, \vec{n}))}_{\text{C.I. en } n_t + \text{C.L. en } n_i} = 0$$

en choisissant  $\vec{\zeta}_h = \mathbb{1}_{\omega_h}$  fonction caractéristique de  $\omega_h$  entre autres on a :

$$\int_{\delta\omega_h} \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_h^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_h^d, \vec{n}) = 0$$

$\underbrace{\delta\omega_h = \overline{\omega_h^n} \cup \overline{\omega_h^{n+1}}}_{\text{faces horizontales}} \cup \underbrace{(\partial\omega_h \times [t_n, t_{n+1}])}_{\text{faces verticales}}$

Soit, si  $A = \text{aire}(\omega_h)$ , on a le schéma implicite suivant :

$$A \underbrace{(\vec{w}(\vec{\varphi}_h^d) - \vec{w}(\vec{\varphi}_h^e))}_{\text{C.I. - faces horizontales}} + \Delta t \int_{\delta\omega_h} \underbrace{(\vec{f}^i(\vec{\varphi}_h^e) \cdot n_i) - (\vec{f}^i(\vec{\varphi}_h^d) \cdot n_i)}_{\text{faces verticales}} = 0$$

où  $\vec{\varphi}_h^e = \vec{\varphi}_h(t_n, x)$  est la solution au précédent pas de temps

Ce schéma peut être explicité en posant :  $\vec{\varphi}_h = \vec{\varphi}_h^e$  sur  $\delta\omega_h$

Alors :

$$\vec{w}(\vec{\varphi}_h^d) = \vec{w}(\vec{\varphi}_h^e) - \frac{\Delta t}{A} \int_{\delta\omega_h} (\vec{f}^i(\vec{\varphi}_h^e) \cdot n_i) - (\vec{f}^i(\vec{\varphi}_h^d) \cdot n_i)$$

ce schéma explicite peut aussi être considéré comme 1<sup>ère</sup> étape d'un point fixe en  $\vec{w}$ , la condition de CFL s'identifiant à la condition de convergence. Sur le plan théorique les arguments permettant d'appréhender la consistance avec les équations faibles et l'inéquation d'entropie proviennent de la décomposition convexe-concave des flux (réf. [1], [4]).

. Les conditions aux limites utilisées si  $\delta\omega_h$  touche  $\partial\Omega$   
(faces verticales)

On ajoute les termes suivants au second membre :

\* Condition d'obstacle :

$$+ \Delta t \int_{\delta\omega_h \text{ paroi}} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{mx} \\ p_{my} \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_h^d, \vec{n})$$



qui équivaut à la nullité des flux des variables conservatives.

- Condition imposée (à "l'amont", caractéristiques entrantes) :

$$\vec{\psi}_R^I + \Delta t \int_{\partial \Omega_R^I} \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}_{R,n}^I) - \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}_R^d, \vec{n})$$

$\vec{\psi}_R^I$  étant la valeur imposée ( $\equiv \vec{\psi}_R^e$ )

- Il n'y a rien sur la frontière "libre" (à "l'aval", caractéristiques sortantes).

### 2.3 - L'algorithme d'auto-adaptation du maillage

#### 2.3.1 - Choix du critère spécifique de raffinement et déraffinement du maillage

Un critère de raffinement "naturel" sur une arête, spécifique à la méthode car issu des propriétés de l'approximation, de type entropique et toujours calculable, est fourni par l'estimation de la stabilité du schéma, en implicite ou en explicite (cette estimation permet d'ailleurs également d'étudier l'unicité d'une solution en association avec le choix de la condition limite paroi).

Avec le choix du schéma explicite au temps  $t_n$  on effectue le produit scalaire par  $\vec{\psi}_{n-1}^d$  ( $\vec{\psi}$  intérieur "initial" en temps précédent), soit, sur un élément intérieur au domaine :

$$\sigma_R(\vec{w}(\vec{\psi}_n^d) - \vec{w}(\vec{\psi}_{n-1}^d)) \vec{\psi}_{n-1}^d + \Delta t \int_{\partial \Omega_R} \vec{\psi}_{n-1}^d (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\psi}_{n,n}^e) - \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\psi}_{n-1,n}^d)) d\sigma = 0$$

On développe (cf. [Annexe 2]) en utilisant les diverses propriétés de la décomposition cinétique des flux (propriétés de  $\Sigma^*$ ,  $\Sigma^{*+}$ ,  $\Sigma^{*-}$ ) et on obtient sur un élément ne touchant pas la paroi la relation suivante :

$$0 = \underbrace{\left[ \sigma_R(S(\vec{\psi}_n^d) - S(\vec{\psi}_{n-1}^d)) + \Delta t \int_{\partial \Omega_R} (\Sigma^*(\vec{\psi}_{n,n}^e) - \Sigma^*(\vec{\psi}_{n-1,n}^d)) \right]}_E + \underbrace{\left[ \sigma_R(S^*(\vec{\psi}_n^d) - S^*(\vec{\psi}_{n-1}^d)) + (\vec{\psi}_{n-1}^d - \vec{\psi}_n^d) \vec{\nabla} S^*(\vec{\psi}_n^d) \right]}_R + \Delta t \int_{\partial \Omega_R} \Sigma^*(\vec{\psi}_{n,n}^e) - \Sigma^*(\vec{\psi}_{n-1,n}^d) + (\vec{\psi}_{n-1}^d - \vec{\psi}_n^d) \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\psi}_{n,n}^e)$$

Le terme  $E$  représente une approximation décentrée (du fait de l'explicitation : en implicite on a l'approximation centrée) de l'inéquation d'entropie : c'est donc un terme négatif. Le "résidu entropique",  $R$ , doit donc nécessairement

être positif ou nul pour que le schéma respecte cette inéquation d'entropie, ce qui induit ici une condition de stabilité, "de type CFL", sur le pas de temps (majoration locale sur l'élément, de  $\Delta t$ ).

Notons que sur le schéma implicite, la stabilité est inconditionnelle, car dans le "résidu"  $R$  on voit alors apparaître une expression positive du fait de la concavité de  $\sum^*$  (inégalité caractéristique de la concavité).

La positivité de  $R$  traduit une dissipation,  $R$  doit être le plus proche possible de 0 (le cas limite  $R = 0$  correspond à un schéma non dissipatif : l'inégalité d'entropie devenant alors une équation).

D'où le choix de cette expression  $R$  caractérisant la dissipation comme critère "unilatéral" (associé à une normale, sortante à l'élément considéré ) sur une arête.

### 2.3.2 - Stratégie d'auto-adaptation du maillage et/ou du domaine

On choisit :

-> pour "déraffiner" le maillage, d'associer ce critère "bilatéralement" aux arêtes en sommant les contributions provenant des 2 éléments adjacents à cette arête (en 1D ou 2D) correspondant à 2 normales opposées.

Déraffiner consiste donc à supprimer les arêtes sur lesquelles ce critère bilatéral est "petit" (après définition d'une échelle rendant la valeur du critère relative par rapport à la solution).

-> le raffinement porte, lui, sur les éléments : il s'agit de subdiviser (on a le choix de la stratégie de subdivision) tout élément sur lequel le critère obtenu par sommation des critères unilatéraux sur les arêtes est "grand".

Cette stratégie est cohérente puisque l'importance de la dissipation caractérise la variation de la solution. D'autre part, elle est totalement "stationnaire" et permet une évolution automatique du maillage en fonction des discontinuités de la solution ("suivi" de chocs ... ) même dans le cas de phénomènes rapides.

En ce qui concerne les arêtes appartenant à la frontière paroi en espace, le critère "unilatéral" est légèrement différent mais issu lui aussi du schéma et de l'estimation de stabilité. Le terme supplémentaire, associé à la condition limite paroi, dans le schéma explicite est le suivant :

$$-\Delta t \int_{\partial \mathcal{T}_h \text{ paroi}} \left( p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ m_x \\ m_y \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_{n-1}^d, \vec{n}) \right) d\sigma \quad \text{en 2-D.}$$

$\partial \mathcal{T}_h$  paroi étant l'ensemble des arêtes de l'élément sur l'obstacle (cette condition équivaut à la nullité des flux des variables conservatives sur la paroi).

Par conséquent, le critère "unilatéral" de raffinement entropique prend sur les arêtes paroi la forme particulière suivante :

$$-\Delta t \int_{\partial \mathcal{T}_h \text{ paroi}} \left( p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ m_x \\ m_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\varphi}_{n-1}^d - \vec{\varphi}_{n-1}^d \cdot \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_{n-1}^d, \vec{n}) \right) d\sigma$$

soit

$$-\Delta t \int_{\partial \mathcal{T}_h \text{ paroi}} \left( p \cdot m_x \varphi_2^d + p m_y \varphi_3^d - \vec{\varphi}_{n-1}^d \cdot \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\varphi}_{n-1}^d, \vec{n}) \right) d\sigma$$

De plus, cette stratégie d'auto-adaptation peut être envisagée sous deux aspects :

-> l'évolution du maillage dans des frontières extérieures "fixes"

ou :

-> l'évolution du domaine et du maillage : dans ce cas, les frontières sont également modifiables (ajout - ou suppression - d'éléments - d'arêtes - touchant la frontière extérieure (libre ou avec condition imposée)).

Cette deuxième démarche convient mieux a priori aux phénomènes instationnaires rapides (qui sinon requièrent un domaine de calcul important).

### 3 - DEROULEMENT DE L'ETUDE

#### 3.1 - Etude monodimensionnelle

Le code monodimensionnel intégrant l'adaptation automatique du maillage a été développé avec le déroulement suivant :

à un instant donné tn on dispose

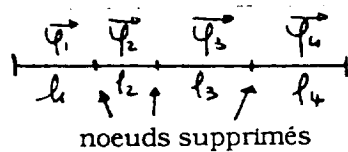
- d'une configuration du maillage

- d'une solution  $\vec{\varphi}^n$  sur ce maillage
  - le pas de temps est  $\Delta t_n$
- on effectue la séquence :

- \* calcul des critères bilatéraux sur les "arêtes" (qui sont des noeuds) :  $C_A$
- \* déraffinage :  $\xi_A$  étant la borne choisie pour le critère sur une arête, si  $C_A \leq \xi_A$  alors on supprime l'arête A.
- \* calcul des critères sur les nouveaux éléments ainsi constitués :  $C_E$
- \* raffinement :  $\xi_E$  est la borne choisie pour les critères sur les éléments et si  $C_E \geq \xi_E$  alors on subdivise l'élément
- \* calcul du nouveau pas de temps  $\Delta t_{n+1}$  (respectant la condition de stabilité)
- \* nouvelle résolution par la méthode de décomposition cinétique des flux.

- Dans le cas d'un maillage "à frontière variable", la phase "d'extension au bord" éventuelle par rajout d'un élément s'insère entre le déraffinage et le calcul des critères sur les éléments.

- Après déraffinage des arêtes, on choisit pour  $\vec{\varphi}$  initial sur les nouveaux éléments constitués, la moyenne, pondérée par les longueurs, des  $\vec{\varphi}$  sur les anciens éléments les constituant :



$$\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^4 \frac{l_i}{l_1 + \dots + l_4} \cdot \vec{\varphi}_i$$

- Pour le raffinement des éléments, on s'est contenté de les subdiviser en 2 sous-éléments de longueur égale (bien des stratégies seraient envisageables à ce niveau). On affecte à chacun des 2 nouveaux éléments le  $\vec{\varphi}$  de l'élément raffiné. On fixe également une taille minimale d'élément en dessous de laquelle on ne raffine plus.

D'autre part, l'ensemble de ces opérations a été effectué systématiquement à chaque pas de temps. Là encore la stratégie est modulable (déterminer l'intervalle optimal de n pas de temps entre 2 adaptations de maillage).

Cependant la complexité du problème nous a conduits à conserver ces hypothèses simplificatrices pour effectuer les tests de critère.

### 3.2 - Etude bidimensionnelle

Il s'agissait d'implanter une généralisation bidimensionnelle de ce code, utilisant des éléments espace de structure polygonale quelconque (propriété essentielle de la méthode, jusque là inexploitée).

Pour cela on a dû réaliser un code permettant, de la façon la plus générale, de mailler des domaines de calcul pour la résolution par éléments finis de systèmes d'EDP du 1er ordre linéaires ou non linéaires (cas des équations d'Euler).

Dans le cas de la mécanique des fluides, on utilise donc des éléments destructurés qui sont des polygones convexes définis à l'état initial comme des triangles, et qui sont amenés à se transformer suivant l'utilisation des raffinements et déraffinements. On obtiendra ainsi un maillage très dense au voisinage des chocs, permettant de gagner en précision, et au contraire les éléments seront très grands dans les zones où rien n'affecte la solution. La finalité est d'automatiser le déplacement des points, le rajout et la suppression des éléments (tout ceci bien sûr en fonction du critère entropique propre à la méthode). Qui plus est, afin de ne pas restreindre à un domaine borné le calcul, on choisit de pouvoir étendre le domaine espace-temps de façon automatique. Toutes ces techniques doivent s'étendre ensuite au 3D.

#### 3.2.1 - Construction du maillage

L'élaboration du maillage nécessite la construction des objets d'une part, l'écriture d'outils de maillage d'autre part. Pour cela un modeleur graphique et un mailleur ont été réalisés. Les objets 2D sont stockés sous forme d'ensembles de domaines plans convexes, bornés par des ensembles de frontières. (A ces domaines peuvent être associés des codes, servant au calcul suivant le type de problème résolu. Cette structure confère au maillage homogénéité et régularité).

Chaque frontière est déterminée par l'ensemble des points la constituant, qui sont fournis soit par fichier, soit par la "souris", ou par des critères géométriques simples (droites, cercles, ellipses ... ). Les domaines étant numérotés, on affecte à

chaque frontière les 2 numéros des domaines contigus. Un domaine est connu par la donnée de l'ensemble de ses frontières, dans le sens trigonométrique.

Le mailleur s'appuie, au stade initial, sur les points définissant les frontières (et crée des triangles) : il génère les tableaux de connectivité et la numérotation des triangles, arêtes et sommets créés.

Une technique de barycentrage peut être utilisée si le maillage requiert une régularité : elle consiste à déplacer un sommet au barycentre de l'ensemble des noeuds qui l'entourent, en s'interdisant de toucher aux sommets des frontières codées.

Les planches 1 à 4 représentent 2 objets et les maillages générés sur ces objets. La concentration des points initiaux définit la finesse du maillage et la taille des triangles.

Les planches 5 et 6 montrent les barycentrages effectués sur ces maillages.

### 3.2.2 - Raffinement auto-adaptatif 2D

Le code de calcul 2D résolvant les équations d'Euler par la méthode de Galerkin discontinue, précédemment développé, traitait le cas de maillages exclusivement formés d'éléments triangulaires.

La théorie permettant l'utilisation d'éléments polygonaux quelconques, l'adaptation du code a été faite dans ce sens (on se limite à des polygones convexes). Ces éléments polygonaux ont l'avantage d'être plus souples à manier dans les techniques de raffinement et déraffinement.

Les étapes de raffinement et déraffinement du maillage utilisent toujours l'évaluation du reste de l'inéquation d'entropie du schéma comme critère : cette mesure de la variation du flux d'entropie permet de savoir si on influe sur le calcul de la solution.

Pour le déraffinement : si la valeur du critère est "faible" (inférieure à une borne fixée) sur l'arête, on supprime cette arête et on réunit les 2 éléments qui l'avoisinaient. Afin de conserver une structure cohérente on exige du nouvel élément polygonal qu'il soit convexe.

Pour le raffinement : on évalue le critère élémentaire (comme indiqué Annexe 2) et si sa valeur est "forte" (supérieure à une autre borne prédéfinie) alors on raffine l'élément. Le raffinement consiste à appliquer le mailleur sur l'élément s'il n'est pas triangulaire. S'il l'est, on le divise en 4 nouveaux triangles par création de points au milieu des arêtes.

Raffinement et déraffinement sont contrôlés par le choix de la borne correspondante sur le critère : cette borne est fonction de la valeur moyenne prise par les critères sur l'ensemble du maillage.

D'autre part, avec les raffinements successifs la condition de CFL limitant la taille du pas de temps devient très contraignante. Par suite, ont été implémentés une semi-implication puis une implication locales du schéma, afin de supprimer cette restriction rendant les calculs très coûteux (cf. Annexe 4).

Les figures 7 et 8 montrent des maillages "polygonaux" où figurent triangles et quadrilatères (après déraffinage). (Théoriquement on n'a même pas besoin d'un "raccordement" au niveau des sommets : les sommets n'ont pas besoin de coïncider).

La figure 9 représente un objet déraffiné entièrement puis raffiné sur 2 couronnes intérieures uniquement.

### 3.3 - Etude tridimensionnelle

On étudie actuellement la possibilité de construire un mailleur tétraédrique automatique ou semi-automatique tri-dimensionnel autour d'objets de faible complexité, par la méthode du front.

Pour cela est mis en place un mailleur 3D surfacique qui définit alors le corps comme un ensemble de faces triangulaires.

De plus quelques outils de construction graphique 3D sont maintenant utilisables.

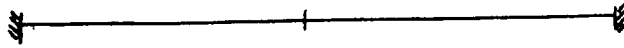
Une étape intermédiaire a consisté à développer un mailleur tridimensionnel utilisable sur des corps axisymétriques, le résultat étant un ensemble de prismes et de tétraèdres.

Parallèlement, a été implantée la version 3D de l'approximation Galerkin discontinue.

## 4 - RESULTATS NUMERIQUES

### 4.1 - LE TUBE A CHOCS DE SOD MONODIMENSIONNEL

Il s'agit d'un tube de longueur 1 fermé aux 2 extrémités pour une paroi :



et initialisé par 2 états (séparés par une membrane)

gauche

$$\begin{pmatrix} \rho = 1. \\ \rho \cdot \lambda = 0. \\ \rho \cdot e = 2.5 \end{pmatrix}$$

droite

$$\begin{pmatrix} \rho = 0.125 \\ \rho \cdot \lambda = 0. \\ \rho \cdot e = 0.25 \end{pmatrix}$$

Divers tests ont été effectués :

-> sur un domaine évolutif : partant de 4 éléments (2 de chaque côté du choc initial) de longueur  $dx = 5 \cdot 10^{-3}$  et effectuant des extensions au bord. (On suppose alors le tube "ouvert" aux extrémités, on ne peut étudier les réflexions sur la paroi).

-> sur un domaine fixe de longueur 1, correspondant initialement 200 éléments de longueur  $dx = 5 \cdot 10^{-3}$

Divers ajustements ont été nécessaires :

. choix du  $\vec{\varphi}$  initial sur l'élément rajouté au bord dans le 1er cas ( $\vec{\varphi}$  de l'élément adjacent ou  $\vec{\varphi}$  "extérieur").

Un inconvénient apparaît à ce niveau : si l'on accepte de "déraffiner" le bord, on peut passer son temps à ajouter puis enlever au bord le même élément ; par contre, si systématiquement on rajoute un élément de même longueur que le voisin, on croît exponentiellement



- dans le 2° cas, pour le tube de SOD (très "stiff") la génération d'éléments très grands est gênante. On a affecté un indicateur aux arêtes créées par raffinement, qui seules pourront être déraffinées : ainsi, partant d'un maillage "pas trop fin", on ne sera jamais moins fin. D'ailleurs dans ce cas violemment instationnaire, il apparaît comme nécessaire d'avoir initialement une certaine finesse de maillage.

- Diverses "interférences" entre raffinement et déraffinement ont instauré la nécessité d'un "retard" au déraffinement ainsi que d'une "avance" au raffinement. En effet le calcul du critère explicite à partir des résultats précédents provoquait le déraffinement d'éléments nouvellement raffinés ! ... D'où la prolifération du raffinement dans les mêmes zones au temps suivant. Diverses solutions ont été testées :

-> modification du critère élémentaire de raffinement (cf. [A2])

au lieu de  $R = \alpha_k A + \Delta t \cdot \sum_i l_i \cdot c_i$   $\text{ou } A \leq 0$   
et  $c_i \geq 0 \forall i$

on calcule  $R' = \frac{\alpha_k}{\Delta t} |A| + \sum_i l_i \cdot c_i$

-> "mixage" entre le critère explicite et le critère implicite :

Partant du schéma explicite monodimensionnel :

$$\Delta x (\vec{w}(\vec{\varphi}) - \vec{w}(\vec{\varphi}^0)) + \Delta t (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^0, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^0, \vec{n})) = 0$$

. si on effectue le produit par  $\vec{\varphi}^0$  on obtient la somme :

inéquation d'entropie décentrée (explicite) + critère explicite = 0

. si par contre on effectue le produit par  $\vec{\varphi}$  on obtient :

inéquation d'entropie implicite + critère en  $\vec{\varphi}$  et  $\vec{\varphi}^0 = 0$

-> simple "décalage" du déraffinement d'un pas de temps (retard imposé).

Les bornes test du critère pour le raffinement et le déraffinement ont dû également être ajustées pour éviter de provoquer des "escaliers" dans la solution - continuité -.

Les planches 10 et 11 : donnent un aperçu des résultats satisfaisants de cette batterie d'essais.

## 4.2 - Les tests bidimensionnels

### 4.2.1 - Le tube de SOD bidimensionnel

La technique d'auto-adaptation du maillage a été testée dans le cas du tube à chocs de SOD implémenté en 2D (le cas étant en fait monodimensionnel).

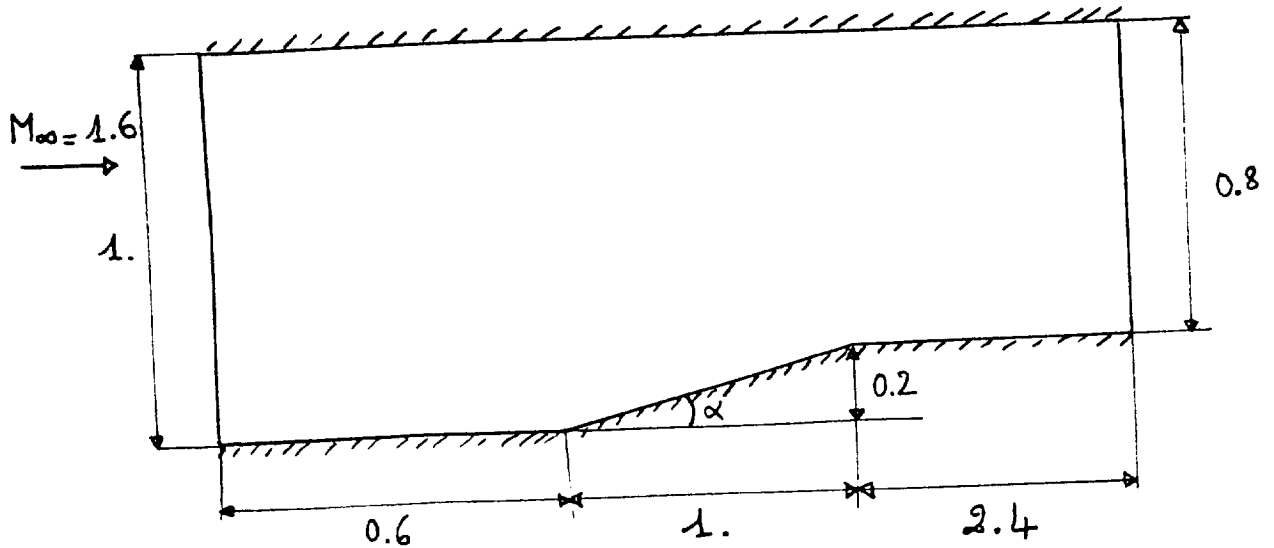
Le calcul étant violemment instationnaire, on effectue toujours les 2 étapes (déaffinage/raffinage) à chaque pas de temps, afin de suivre pas à pas l'évolution du choc et de la détente : on raffine au niveau du choc qui "avance" - cependant que le déaffinement intervient sur les zones "d'état constant".

On obtient ainsi une solution satisfaisante avec une bonne précision au niveau du choc comme de la détente (voir courbes 12 et 13, où on a représenté toutes les valeurs prises sur le maillage), à partir d'un maillage initial assez grossier.

### 4.2.2 - La rampe inclinée

Un autre cas test instationnaire a été réalisé :

il s'agit d'un écoulement confiné sur une rampe inclinée (dièdre) d'un angle de  $11^\circ$  environ



L'écoulement présente un choc fort détaché instationnaire.

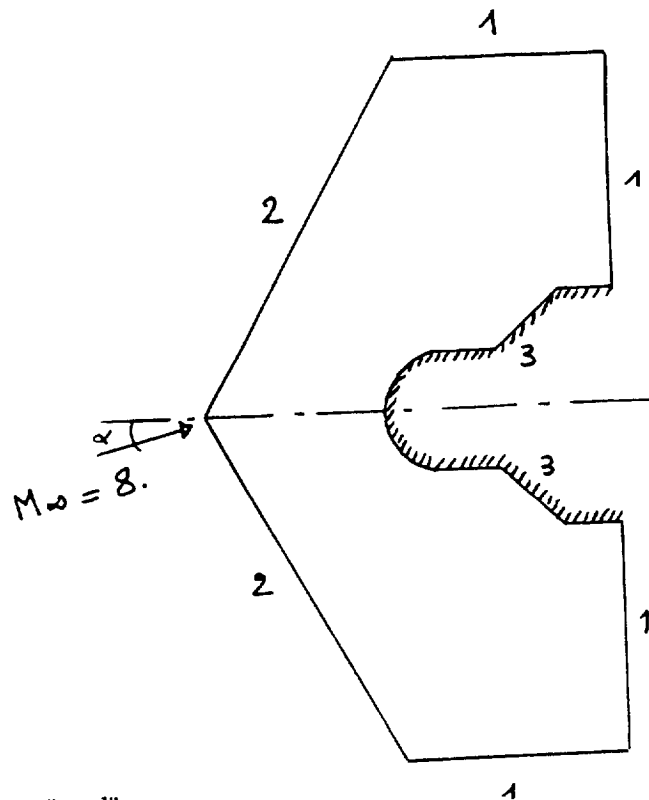
Les figures 14 à 18 représentent le maillage au cours de l'exploitation, une focalisation sur la zone raffinée, des iso-valeurs de Mach, pression et entropie massique.

La visualisation des résultats utilise la norme graphique Phigs.

L'approximation Galerkin discontinue étant constante par élément on représente les courbes iso-valeurs pour les résultats en coloriant les éléments après affectation d'une couleur à chaque plage de valeurs. Le nombre d'intervalles entre valeurs minimale et maximale est limité par le nombre maximum de couleurs que l'on désire. Ceci permet une interprétation directe des résultats "bruts" sans faire intervenir aucun lissage ni approximation supplémentaire.

#### 4.2.3 - Objet 2D de forme axisymétrique avec incidence de $2^\circ$

Un autre calcul a été effectué en 2D sur le profil symétrique suivant avec une incidence de  $2^\circ$  (il s'agit d'un objet axisymétrique).



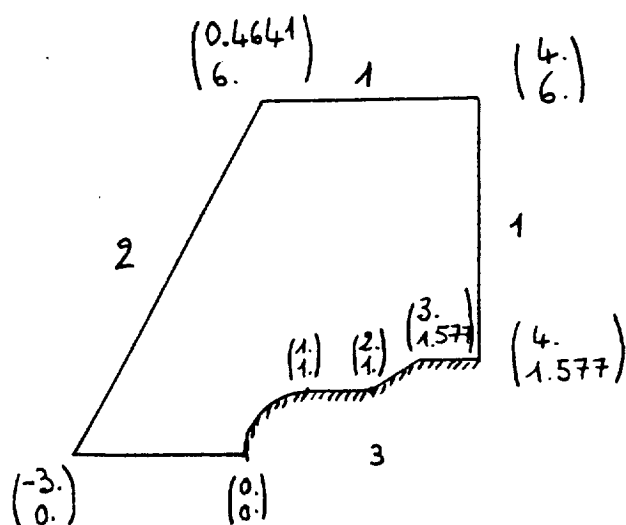
- 1 : frontière libre, "aval"
- 2 : frontière en flux imposé, "amont"
- 3 : frontière paroi

Les figures 19 à 22 montrent une visualisation du maillage et des iso-valeurs correspondants.

#### 4.3 - Résultats 3D

La première version simplifiée du mailleur 3D a permis de réaliser le calcul sur le tube à chocs de SOD sur un cylindre plein.

Un calcul est en cours sur l'objet précédent mais en 3D avec une incidence de  $0,1^\circ$ .



La visualisation des résultats sous forme d'iso-valeurs 3D et de coupes d'isovaleurs a été programmée. On peut grâce à un plan que l'on promène sur l'objet visualiser les coupes correspondantes.

Les figures 23 et 24 représentent un début de maillage 3-D sur une sphère.

Les figures 25 et 26 montrent l'objet 3D.

## 5 - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La classe des méthodes numériques ouverte par le concept de  $k$  diagonalisation cinétique des équations hyperboliques, dans le cadre de la mécanique des fluides, ne privilégie apparemment pas la méthode de Galerkin discontinu appliquée avec une approximation d'ordre 0. On peut en effet augmenter l'ordre d'approximation, ou fonder une méthode de Petrov Galerkin sur le même principe (cf. [2], [4]). Ces méthodes ont un point commun : elles conduisent toutes à un contrôle de l'entropie sur des maillages de structure quelconque. Nous avons effectué des essais monodimensionnels en élevant le degré de l'approximation Petrov Galerkin. Si dans le cadre d'un schéma implicite les résultats sont corrects (comme le laisse prévoir la théorie), il semble difficile de conduire une explicitation conservant les qualités mathématiques de la méthode, et des CFL "assez grand" (cf. [5]).

Les approximations de type Petrov Galerkin, quant à elles (cf. [4]) conduisent après un "adimensionnement" convenable à des résultats de bonne qualité (cf. [6]).

De toute façon, la trop grande dissipation sur les discontinuités de contact, inhérente à l'ordre peu élevé de l'approximation peut être palliée par une adaptation correcte du maillage, comme le montre cette étude.

Cependant, le caractère explicite de la méthode et la dimension des éléments spatiaux nécessaire à une bonne approximation conduisent à des coûts de calcul élevés (pas de temps trop petits). C'est pourquoi, dans ce cadre, il est nécessaire de passer à une formulation "semi-implicite" qui conserve la même précision spatiale en étant plus performante (stabilité inconditionnelle).

Nous avons pourtant rencontré une difficulté d'ordre numérique (en cours de résolution) : le système local non linéaire à résoudre dans le cas de la semi-implicitation, est mal conditionné quand le Mach tend vers l'infini (en pratique  $Mo \geq V$ ). En effet, il provient de la stationnarisation d'une fonction convexe, mais dont l'une des valeurs propres tend vers 0 quand le Mach tend vers  $+\infty$ . Lorsque ce problème sera résolu, soit par un changement d'entropie, soit par un conditionnement local du système élémentaire, il semble que l'implémentation en 3D conduise à des résultats intéressants tant en précision, qu'en robustesse et en performance.

D'autre part, cette méthode est immédiatement généralisable (cf. [4], [5]) aux mélanges hyperboliques de gaz réactifs, tels qu'on peut en rencontrer en hypersonique. Il semble de plus, que l'interprétation numérique de la diagonalisation

via les équations de Boltzmann, sur chaque espèce peut également permettre de prendre en compte plusieurs équations d'énergie, c'est-à-dire de traiter un cas de mélanges réactifs de gaz hors équilibre thermodynamique, en conservant la structure, les méthodes de résolution et les justifications mathématiques des équations d'Euler des gaz parfaits.

## REFERENCES

- [1] Rapport final n° 1/3290/DERI  
*"Une méthode de "Flux Splitting" pour les systèmes hyperboliques - Application à la résolution des équations d'Euler".*  
 Convention DRET-G6 n° 870002-21, Fév. 88.
  
- [2] P.A. MAZET, Ph. DELORME, F. BOURDEL  
*"Convexity in Hyperbolic Problems : Application to a discontinuous Galerkin method for the resolution of the polydimensional Euler equations".*  
 Communication à la "Second International Conference on hyperbolic problems" March 88. Aachen.
  
- [3] Rapport final n° 1/3324/DERI  
*"Résolution des équations d'Euler par une méthode de Galerkin discontinue issue d'une formulation variationnelle en entropie".*  
 Convention DRET G6 n° 88002.11; Janvier 1989.
  
- [4] F. BOURDEL, J.P. CROISILLE, Ph. DELORME, P.A. MAZET  
*"Sur l'approximation par éléments finis des systèmes hyperboliques k-diagonalisables. Applications aux équations d'Euler et aux mélanges de gaz".*  
 La Recherche Aérospatiale n° 1989-5, p. 15 à 34.
  
- [5] J.P. CROISILLE  
*"Contribution à l'étude théorique et à l'approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz pluridimensionnelle et pluri-espèces".*  
 Thèse - Paris VI (Janv. 90).
  
- [6] V. MOREUX  
*"Approximations Petrov-Galerkin par décomposition cinétique des flux".*  
 Communication à paraître. Groupe de travail EDP. Université Paul Sabatier, Toulouse.

*"Une classe de méthodes d'éléments finis décentrés amont appliquée aux équations d'Euler de la dynamique des gaz".*

Thèse UPS (à paraître).



## ANNEXE 1

EXPLICITATION DE LA DECOMPOSITION CINETIQUE  
DES FLUX EN DIMENSION 1  
(pour la dimension 2, cf [3])

\*  $n=1$  dimension d'espace

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} + \eta \end{pmatrix} \begin{cases} u & \text{vitesse} \\ \eta & \text{paramètre réel positif} \\ \frac{1}{\delta} + \frac{n}{2} = \frac{1}{\delta-1} \end{cases} \quad \delta = 1.4$$

vecteur "de collision"

soit ici :  $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$  d'où  $\delta = \frac{1}{2}$

\* la polaire de l'entropie  $S(\vec{w}) = \frac{u^2}{2}$  est :

$$S^*(\vec{\varphi}) = 2 \cdot C\left(\frac{1}{2}\right) \cdot I(2) \cdot (-\varphi_3)^{-\frac{1}{\delta-1}} \cdot e^{(\varphi_1 - \frac{\varphi_2^2}{2\varphi_3})} \quad (\text{cf [1]})$$

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 < 0$$

où

$$\begin{cases} C(\delta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta^\delta} d\eta \\ I(\delta) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\eta^\delta}{2}} d\eta \\ J_p = \int_0^{+\infty} \eta^p \cdot e^{-\eta^2} d\eta \end{cases} \quad \text{et on a} \quad \begin{cases} J_{p+1} = \frac{p}{2} J_{p-1}, \quad p \in \mathbb{N} \\ C(\delta) = \frac{2}{\delta} J_{\frac{2}{\delta}-1} \\ I(\delta) = 2^{1/\delta} C(\delta) \end{cases}$$

donc

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 4 J_3 = 4 J_1 = 4 \int_0^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{2}$$

$$I(2) = \sqrt{2} C(2) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\vec{\nabla}_q \Sigma^{\sigma+}(\vec{q}, \vec{n}) = \vec{F}_+^{\sigma}(\vec{q}, \vec{n}) =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{\sigma+}(\vec{q}, \vec{n}) \\ -\frac{y_2}{y_3} \Sigma^{\sigma+}(\vec{q}, \vec{n}) - \frac{S^{\sigma}(\vec{q})}{y_3} (1 - \text{erf}(x)) \\ (\frac{y_2^2}{2y_3} - \frac{x}{y_3}) \frac{\Sigma^{\sigma+}(\vec{q}, \vec{n})}{y_3} + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \frac{\Sigma^{\sigma}(\vec{q}, \vec{n})}{4y_3} \end{pmatrix}$$

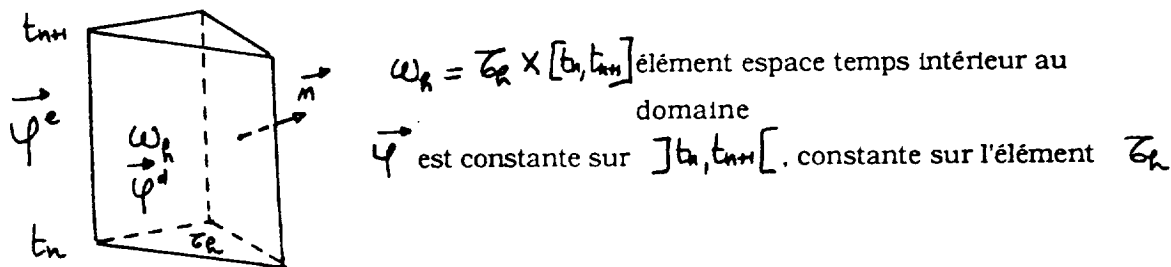
$$\vec{\nabla}_q \Sigma^{\sigma-}(\vec{q}, \vec{n}) = \vec{F}_-^{\sigma}(\vec{q}, \vec{n}) =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{\sigma-}(\vec{q}, \vec{n}) \\ -\frac{y_2}{y_3} \Sigma^{\sigma-}(\vec{q}, \vec{n}) - \frac{S^{\sigma}(\vec{q})}{2y_3} (1 - \text{erf}(x)) \\ (-x^2 - \frac{x}{y_3}) \frac{\Sigma^{\sigma-}(\vec{q}, \vec{n})}{y_3} - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \frac{\Sigma^{\sigma}(\vec{q}, \vec{n})}{4y_3} \end{pmatrix}$$

## ANNEXE 2

ETABLISSEMENT DE L'EXPRESSION DU CRITERE ENTROPIQUE  
D'ADAPTATION DE MAILLAGE  
LIEN AVEC LA STABILITE.

- On raisonne en bidimensionnel, sur des éléments triangulaires en espace, cylindriques en temps (prismes espace (temps)).



Le schéma s'écrit (sans intégration par parties, sur un élément intérieur)

$$\int_{\partial \omega_R} (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n})) d\sigma = \vec{0}.$$

Si on multiplie par  $\vec{\varphi}^d$  on obtient

$$\int_{\partial \omega_R} \vec{\varphi}^d (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n})) d\sigma = \vec{0}.$$

- En dissociant temps et espace, tenant compte de l'approximation et en explicitant le schéma sur les faces "latérales", on obtient (et c'est une estimation de la stabilité du schéma)

$$\underbrace{\omega_R (\vec{w}(\vec{\varphi}_n^d) - \vec{w}(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) \vec{\varphi}_n^d}_{\text{terme temps}} + \Delta t \int_{\partial \omega_R} \vec{\varphi}_n^d (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}_n^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}_n^d, \vec{n})) d\sigma = 0$$

terme ne portant que sur l'espace  
 $(\vec{n}$  normale espace ici)

$\omega_R$  : aire de  $\omega_R$



$\Delta t$  : pas de temps =  $t_{n+1} - t_n$

• On utilise les propriétés suivantes (cf [1], [3])

$$\begin{cases} S^*(\vec{\varphi}) = \vec{w}(\vec{\varphi}) \cdot \vec{\varphi} - S(\vec{w}(\vec{\varphi})) = \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\varphi}} S^*(\vec{\varphi}) - S(\vec{\varphi}) \\ \Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n}) + \Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, \vec{n}) \\ \Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = -\Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n}) \\ \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla} \Sigma^{*(\pm)}(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \Sigma^{*(\pm)}(\vec{\varphi}, \vec{n}) + \Sigma^{(\pm)}(\vec{\varphi}, \vec{n}) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^d (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n})) &= \vec{\varphi}^d \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) \\ &= \vec{\varphi}^d \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \vec{\varphi}^e \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) + \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) + \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) \\ &\quad - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) \\ &= \Sigma^-(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) + \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) + (\vec{\varphi}^d - \vec{\varphi}^e) \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) \end{aligned}$$

On a donc pour le schéma explicite

$$\begin{aligned} \sigma_R (\vec{w}(\vec{\varphi}_n^d) - \vec{w}(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) \cdot \vec{\varphi}_n^d + \Delta t \cdot \underbrace{\int_{\partial \mathcal{G}_R} (\Sigma^-(\vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\varphi}_n^d, \vec{n}))}_{\text{terme spatial}} \\ + \Delta t \cdot \underbrace{\int_{\partial \mathcal{G}_R} (\Sigma^*(\vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}_n^d, \vec{n}) + (\vec{\varphi}_{n-1}^d - \vec{\varphi}_n^d) \cdot \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{n}))}_{\text{terme spatial}} = 0 \end{aligned}$$

Le terme temporel s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_R (\vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d) - \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) \cdot \vec{\varphi}_n^d &= \sigma_R (\vec{\varphi}_n^d \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) \\ &= \sigma_R ((\vec{\varphi}_n^d - \vec{\varphi}_{n-1}^d) \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d) + \vec{\varphi}_n^d \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) \\ &= \sigma_R \left[ (\vec{\varphi}_n^d - \vec{\varphi}_{n-1}^d) \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d) + (S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) + (S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) \right] \end{aligned}$$

Finalement on voit apparaître :

$$E + R = 0$$

où 
$$E = \sigma_R (S(\vec{\varphi}_n^d) - S(\vec{\varphi}_{n-1}^d)) + \Delta t \int_{\partial \mathcal{T}_R} (\sum \vec{\varphi}_{n-1}^e - \sum \vec{\varphi}_{n-1}^d, \vec{n})$$

$$R = \sigma_R \left[ S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d) + (\vec{\varphi}_{n-1}^d - \vec{\varphi}_{n-1}^e) \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d) \right]$$

$$+ \Delta t \int_{\partial \mathcal{T}_R} (\sum \vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{n}) - \sum \vec{\varphi}_{n-1}^d, \vec{n} + (\vec{\varphi}_{n-1}^d - \vec{\varphi}_{n-1}^e) \cdot \vec{\nabla} \sum \vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{n})$$

$$= \sigma_R \cdot A + \Delta t \sum_{i=1}^3 l_i \cdot C_i$$

l'intégrale sur  $\partial \mathcal{T}_R$  s'exprimant  
comme somme sur les arêtes de  $\mathcal{T}_R$

où  $l_i$  est la longueur de l'arête  $i$

et 
$$C_i = \sum^* (\vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{m}_i) - \sum^* (\vec{\varphi}_{n-1}^d, \vec{m}_i) + (\vec{\varphi}_{n-1}^d - \vec{\varphi}_{n-1}^e) \cdot \vec{\nabla} \sum^* (\vec{\varphi}_{n-1}^e, \vec{m}_i)$$

est constante sur l'arête  $i$  de  $\mathcal{T}_R$ .

On reconnaît en  $E$  un terme négatif ou nul car :  $E \leq 0$  est l'inéquation d'entropie décentrée du fait de l'explicitation du schéma.

Le résidu  $R$  doit être positif, pour qu'il y ait stabilité (cela correspond à une dissipation) et le plus proche possible de 0.

or  $A \leq 0$  par convexité de  $S^*$

et  $\forall i : C_i \geq 0$  par concavité de  $\sum^*$  (inégalités caractéristiques)

donc si  $\forall i, C_i = 0$  alors nécessairement  $A = 0$  et  $R = 0$ .

$R$  est choisi comme critère de raffinement sur un élément. (Sur une arête, le critère "unilatéral" est la valeur de  $C_i$ )

$$R = \sigma_R A + \Delta t \sum l_i C_i \geq 0$$

or 
$$A = S^*(\vec{\varphi}_n^d) - S^*(\vec{\varphi}_{n-1}^d) + \underbrace{(\vec{\varphi}_{n-1}^d - \vec{\varphi}_{n-1}^e) \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}_n^d)}_{\uparrow} = -K \frac{\Delta t^2}{2}$$

car ce terme est du 1er ordre en  $\Delta t$

(en effet 
$$S^*(\vec{\varphi}(x, t_{n-1})) = S^*(\vec{\varphi}(x, t_n) - \Delta t \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}(x, t_n) + O(\frac{\Delta t^2}{2})) \cdot \vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}(x, t_n))$$

et 
$$\vec{\varphi}(x, t_{n-1}) = \vec{\varphi}(x, t_n) - \Delta t \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}(x, t_n) + O(\frac{\Delta t^2}{2})$$

La positivité de  $R$  est donc équivalente à la condition de stabilité locale sur l'élément (de type CFL) suivante :

$$-\frac{\Delta t^2}{2} \cdot K + \Delta t \sum_{i=1}^3 l_i C_i \geq 0 \quad \text{ou} \quad \Delta t \leq \frac{2}{K} \sum_{i=1}^3 l_i C_i$$

En implicite on aurait le schéma :

$$\sigma_k (\vec{w}(\vec{\psi}^d) - \vec{w}(\vec{\psi}^{d-1})) \cdot \vec{\psi}^d + \Delta t \int_{\delta \omega_k} \vec{\psi}^d (\vec{\nabla} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \vec{\nabla} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n})) \\ \vec{w}(\vec{\psi}^d) \cdot \vec{\psi}^d = \vec{\nabla} S^*(\vec{\psi}^d) \cdot \vec{\psi}^d = S^*(\vec{\psi}^d) + S(\vec{\psi}^d)$$

On a :

$$0 = \sigma_k (S^*(\vec{\psi}^d) + S(\vec{\psi}^d) - \vec{w}(\vec{\psi}^{d-1}) \cdot \vec{\psi}^d + \vec{w}(\vec{\psi}^{d-1}) \cdot \vec{\psi}^{d-1} - \vec{w}(\vec{\psi}^{d-1}) \cdot \vec{\psi}^{d-1}) \\ + \Delta t \int_{\delta \omega_k} (\Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n})) - \Delta t \int_{\delta \omega_k} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n}) - (\vec{\psi}^e - \vec{\psi}^d) \vec{\nabla} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n})$$

Soit :

$$0 = \sigma_k (S^*(\vec{\psi}^d) + S(\vec{\psi}^d) + (\vec{\psi}^d - \vec{\psi}^{d-1}) \vec{\nabla} S^*(\vec{\psi}^{d-1}) - S^*(\vec{\psi}^{d-1}) - S(\vec{\psi}^{d-1}) \\ + \Delta t \int_{\delta \omega_k} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n}) + \Delta t \int_{\delta \omega_k} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n}) - (\vec{\psi}^e - \vec{\psi}^d) \vec{\nabla} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n})$$

Finalement :  $E + R = 0$

où  $E = \sigma_k (S(\vec{\psi}^d) - S(\vec{\psi}^{d-1})) + \Delta t \int_{\delta \omega_k} \underbrace{\Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n})}_{\text{espace seul}}$

$E \leq 0$  est l'inéquation d'entropie

$$R = \sigma_k (S^*(\vec{\psi}^d) - S^*(\vec{\psi}^{d-1}) + (\vec{\psi}^d - \vec{\psi}^{d-1}) \vec{\nabla} S^*(\vec{\psi}^{d-1})) \\ + \Delta t \int_{\delta \omega_k} \underbrace{\Sigma^*(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\psi}_n^d, \vec{n}) - (\vec{\psi}^e - \vec{\psi}^d) \cdot \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\psi}_n^e, \vec{n})}_{\text{espace seul}}$$

et dans ce cas on peut écrire globalement (espace/temps)

$$\begin{cases} E = \int_{\delta \omega_k} \Sigma^-(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^-(\vec{\psi}_n^d, \vec{n}) \\ R = \int_{\delta \omega_k} \Sigma^*(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\psi}_n^d, \vec{n}) + (\vec{\psi}^d - \vec{\psi}^e) \cdot \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\psi}_n^e, \vec{n}) \end{cases}$$

**NB** : Dans l'un ou l'autre cas, la stabilité globale est étudiée en sommant sur les éléments l'équation  $E + R = 0$

Si  $\sum_{\text{éléments}} R \geq 0$ , alors on a l'inéquation globale d'entropie donc la stabilité.



## ANNEXE 3


EXPRESSION DES CRITERES DE RAFFINAGE  
ET DE DERAFFINAGE EN MONODIMENSIONNEL

Le terme résiduel de l'inéquation d'entropie constitue un critère "unilatéral" sur une arête (= un point en monodimensionnel) du maillage :

$$C = \int_{\text{arête}} \left( \underbrace{\Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n})}_{\text{concavité de } \Sigma^*} + \underbrace{(\vec{\varphi}^d - \vec{\varphi}^e) \cdot \vec{\nabla}_p \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n})}_{\text{espace seul}} \right) \geq 0$$

$\vec{\varphi}^d \xrightarrow{\vec{n}} \vec{\varphi}^e$

\* Déraffiner consiste à supprimer une arête sur laquelle un critère est "petit" : pour cela on calcule un critère bilatéral par arête, en sommant les contributions "unilatérales" venant des 2 éléments adjacents.

$\vec{\varphi}^d \quad \vec{\varphi}^e$   


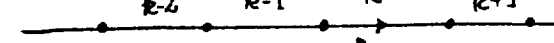
$\vec{n}$  étant fixée on obtient :

sachant que  $\Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, -\vec{n}) = -\Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n})$   
 et que  $\Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) = \Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n}) + \Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, \vec{n})$

$$C_2 = \int_{\text{arête}} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) - \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}) + (\vec{\varphi}^d - \vec{\varphi}^e) \cdot (\vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^e, \vec{n}) + \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}^d, \vec{n}))$$

$$C_2 \geq 0$$

En monodimensionnel :

élément:  $k-1 \quad k \quad k+1$   
  
 noeud:  $k-1 \quad k \quad k+1$

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}, \vec{n}) \\ \vec{F}_m(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla} \Sigma^{*-}(\vec{\varphi}, \vec{n}) \\ \vec{F}_p(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla} \Sigma^{*+}(\vec{\varphi}, \vec{n}) \end{cases}$$

pour  $1 < k < m+1$  :

$$C_2 = F^1(\vec{\varphi}^k) - F^1(\vec{\varphi}^{k-1}) + (\vec{\varphi}^{k-1} - \vec{\varphi}^k) \cdot (\vec{F}_p(\vec{\varphi}^{k-1}) + \vec{F}_m(\vec{\varphi}^k))$$

si  $k=1$ ,  $\vec{\varphi}^{k-1} = \vec{\varphi}^0_{\text{gauche}}$ , si  $k=m+1$ :  $\vec{\varphi}_k = \vec{\varphi}^0_{\text{droite}}$

- Pour raffiner un élément : on le subdivise (en 2 ici dans un premier temps) si le critère  $R$ , calculé par sommation des contributions "unilatérales" de ses arêtes, additionné de la condition initiale est "grand".

Dans ce cas :

$$C_{\text{droite}} = \int_{\text{arête}} \sum^+ (\vec{\varphi}^{k+1}, \vec{m}) - \sum^+ (\vec{\varphi}^k, \vec{m}) + (\vec{\varphi}^k - \vec{\varphi}^{k+1}) \cdot \vec{\nabla} \sum^+ (\vec{\varphi}^{k+1}, \vec{m}).$$

$$C_{\text{gauche}} = \int_{\text{arête}} -\sum^+ (\vec{\varphi}^{k+1}, \vec{m}) + \sum^+ (\vec{\varphi}^k, \vec{m}) + (\vec{\varphi}^{k+1} - \vec{\varphi}^k) \cdot \vec{\nabla} \sum^+ (\vec{\varphi}^k, \vec{m}).$$

$$C_{\text{initial}} = \int_{\text{élément}} \sum^+ (\vec{\varphi}^k_0, \vec{m}_i) - \sum^+ (\vec{\varphi}^k, \vec{m}_i) + (\vec{\varphi}^k - \vec{\varphi}^k_0) \cdot \vec{\nabla} \sum^+ (\vec{\varphi}^k, \vec{m}_i) \\ = l(k) \cdot A \quad l(k) \text{ longueur de l'élément } k.$$

$$\vec{m}_i = (-1, 0), \quad m_x = -1, \quad m_y = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} \sum^+ (\vec{\varphi}, \vec{m}_i) = -\sum^+ (\vec{\varphi}, -\vec{m}_i) = -S^*(\vec{\varphi}) = -w_1(\vec{\varphi}) \\ \vec{\nabla} \sum^+ (\vec{\varphi}, \vec{m}_i) = -\vec{\nabla} S^*(\vec{\varphi}) = -\vec{w}(\vec{\varphi}). \end{cases}$$

Soit :

$$R = \Delta t (C_{\text{gauche}} + C_{\text{droite}}) + C_{\text{initial}}$$

$$\text{et } C_{\text{droite}} = F_m^1(\vec{\varphi}^{k+1}) - F_m^1(\vec{\varphi}^k) + (\vec{\varphi}^k - \vec{\varphi}^{k+1}) \cdot \vec{F}_m(\vec{\varphi}^{k+1})$$

$$C_{\text{gauche}} = F_p^1(\vec{\varphi}^k) - F_p^1(\vec{\varphi}^{k+1}) + (\vec{\varphi}^{k+1} - \vec{\varphi}^k) \cdot \vec{F}_p(\vec{\varphi}^{k+1})$$

$$C_{\text{init}} = (-w_1(\vec{\varphi}^k_0) + w_1(\vec{\varphi}^k) - (\vec{\varphi}^k - \vec{\varphi}^k_0) \cdot \vec{w}(\vec{\varphi}^k)) \cdot l(k)$$

ceci pour  $1 < k < m$

si  $k=1$  on modifie  $C_{\text{gauche}}$  où

si  $k=m$  on modifie  $C_{\text{droite}}$  où

$$\vec{\varphi}^{k-1} = \vec{\varphi}^0_{\text{gauche}}$$

$$\vec{\varphi}^{k+1} = \vec{\varphi}^0_{\text{droite}}$$

## ANNEXE 4

## SEMI-IMPLICITATION LOCALE DU SCHEMA

Le schéma implicite, inconditionnellement stable, s'écrit :

$$\int_{\delta\omega_k} (\vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^e, \vec{m}) - \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^d, \vec{m})) = \vec{0}$$

sur un élément  $\omega_k$   
intérieur au  
domaine espace-  
temps

Avec l'intégration par parties, équivalant à rajouter le terme nul :  $\int_{\partial\omega_k} \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^d, \vec{m}) = 0$   
- on a l'écriture équivalente :

$$\int_{\delta\omega_k} (\vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^e, \vec{m}) + \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^d, \vec{m})) = \vec{0}$$

L'approximation étant constante par élément espace et tranche de temps, on détaille de la façon suivante :

$$\sigma_k (\vec{w}(\vec{\psi}^d) - \vec{w}(\vec{\psi}_0^d)) + \Delta t \int_{\delta\tau_k} (\vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^e, \vec{m}) + \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^d, \vec{m})) = \vec{0}$$

où  $\sigma_k$  est l'aire de  $\tau_k$

on effectue une semi-explicitation (ou semi-implicitation, par rapport au schéma explicite conditionnellement stable) sur le terme en  $\vec{\psi}^e$ , d'où :

$$\sigma_k \vec{w}(\vec{\psi}^d) + \Delta t \int_{\delta\tau_k} \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}^d, \vec{m}) = \sigma_k \cdot \vec{w}(\vec{\psi}_0^d) - \Delta t \int_{\delta\tau_k} \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}_0^e, \vec{m})$$

cela correspond à une relaxation de type Jacobi.

Ce schéma est encore conditionnement stable mais de façon beaucoup moins restrictive que l'explicite. Il s'agit d'un système non linéaire impliquant tous les voisins.

On peut cependant linéariser ce système par pseudo-Newton ; en effet on peut l'écrire :

$$\vec{F}(\vec{\psi}^d) = \vec{\nabla} G(\vec{\psi}^d) = \vec{F}_0$$

où 
$$\vec{F}_0 = \sigma_k \cdot \vec{w}(\vec{\psi}_0^d) - \Delta t \int_{\delta\tau_k} \vec{\nabla} \Sigma^* (\vec{\psi}_0^e, \vec{m})$$

et 
$$G(\vec{\varphi}^d) = \sigma_R S^*(\vec{\varphi}^d) + \Delta t \int_{\delta \Omega} \Sigma^{**}(\vec{\varphi}^d, \vec{n})$$

$G$  est une fonction convexe strictement monotone, ce qui assure que le système  $\vec{\nabla} G(\vec{\varphi}^d) = \vec{F}_0$  admet une solution unique et peut être résolu par une méthode itérative de pseudo-Newton :

$$\begin{cases} \vec{X}_0 = \vec{\varphi}_0^d & \text{initialisation} \\ \vec{X}^{m+1} = \vec{X}^m - J_{\vec{F}}^{-1}(\vec{X}^m) \cdot \vec{F}(\vec{X}^m) \end{cases}$$

et si  $\vec{F} = (f_i)_{1 \leq i \leq 4}$

$$J_{\vec{F}} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 4} \quad \text{comporte le hessien de } \Sigma^{**}$$

On calcule les dérivées par différences divisées :

$$\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} = \frac{f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_j + h, \dots, \varphi_n) - f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n)}{h}$$

Cette méthode est utilisée localement sur chaque élément, ce qui est assez coûteux malgré le gain sur le pas de temps, bien qu'on se limite au calcul d'un seul Jacobien par élément (qui est réutilisé au cours des itérations). Cette semi-implication permet déjà de multiplier le  $\Delta t$  par 10. Elle accentue un peu la dissipation.

On pourrait également résoudre par gradients conjugués ; il s'agit de minimiser

$$G(\vec{\varphi}^d) - \vec{F}_0 \cdot \vec{\varphi}^d \quad \text{de la façon suivante :}$$

$$\begin{cases} \vec{X}_0 = \vec{\varphi}_0^d \\ \vec{X}^{m+1} = \vec{X}^m - \rho^m \vec{U}^m \end{cases} \quad \text{où } {}^t \vec{U}^m \cdot \vec{\nabla} G(\vec{X}^m) \neq 0 \quad , \text{ par exemple } \vec{U}^m = \vec{\nabla} G(\vec{X}^m)$$

$\rho^m$  minimise chaque ligne :

$$\rho^m = \frac{{}^t \vec{U}^m \cdot \vec{\nabla} G(\vec{X}^m)}{{}^t \vec{U}^m \cdot \text{Hess } G(\vec{X}^m) \vec{U}^m}$$

Cependant, pour se libérer complètement de la contrainte de CFL sur  $\Delta t$ , on a également résolu le schéma implicite par une méthode de point fixe :

$$\sigma_R \vec{w}(\vec{\varphi}_P^d) + \Delta t \int_{\delta \vec{\sigma}_R} \vec{\nabla} \Sigma^*(\vec{\varphi}_P^d, \vec{n}) = \sigma_R \vec{w}(\vec{\varphi}_0^d) - \Delta t \int_{\delta \vec{\sigma}_R} \vec{\nabla} Z^*(\vec{\varphi}_P^e, \vec{n})$$

↑  
 $\vec{\varphi}_0^e$

qui converge vers la solution du schéma implicite (initialement on prend  $\vec{\varphi}_0^e$ ).

A chaque étape du point fixe, on résoud par le pseudo-Newton, et ceci sur chaque élément espace du maillage.

-  $\Delta t$  ne doit cependant pas tendre vers  $+\infty$  sinon le terme de dissipation tendrait vers  $+\infty$ .

Bien que le pas de temps utilisé puisse ici être très grand (dans le cas de configurations asymptotiquement stationnaires du moins). Cette méthode est malgré tout coûteuse en temps CPU (à cause des 2 méthodes itératives imbriquées).

Jusqu'à  $M_\infty = 3$ , elle donne de bons résultats, bien que lente.

Mais à des Machs plus élevés (on a essayé  $M_\infty = 8$ ) la méthode de Newton se met à diverger. En fait, la matrice hessienne de  $\Sigma^*$  qui intervient dans le Newton est très mal conditionnée dans ce cas (or elle dépend du  $M_\infty$ ).

Il faudrait alors effectuer un changement d'entropie pour que cette matrice ne dépende plus du Mach.

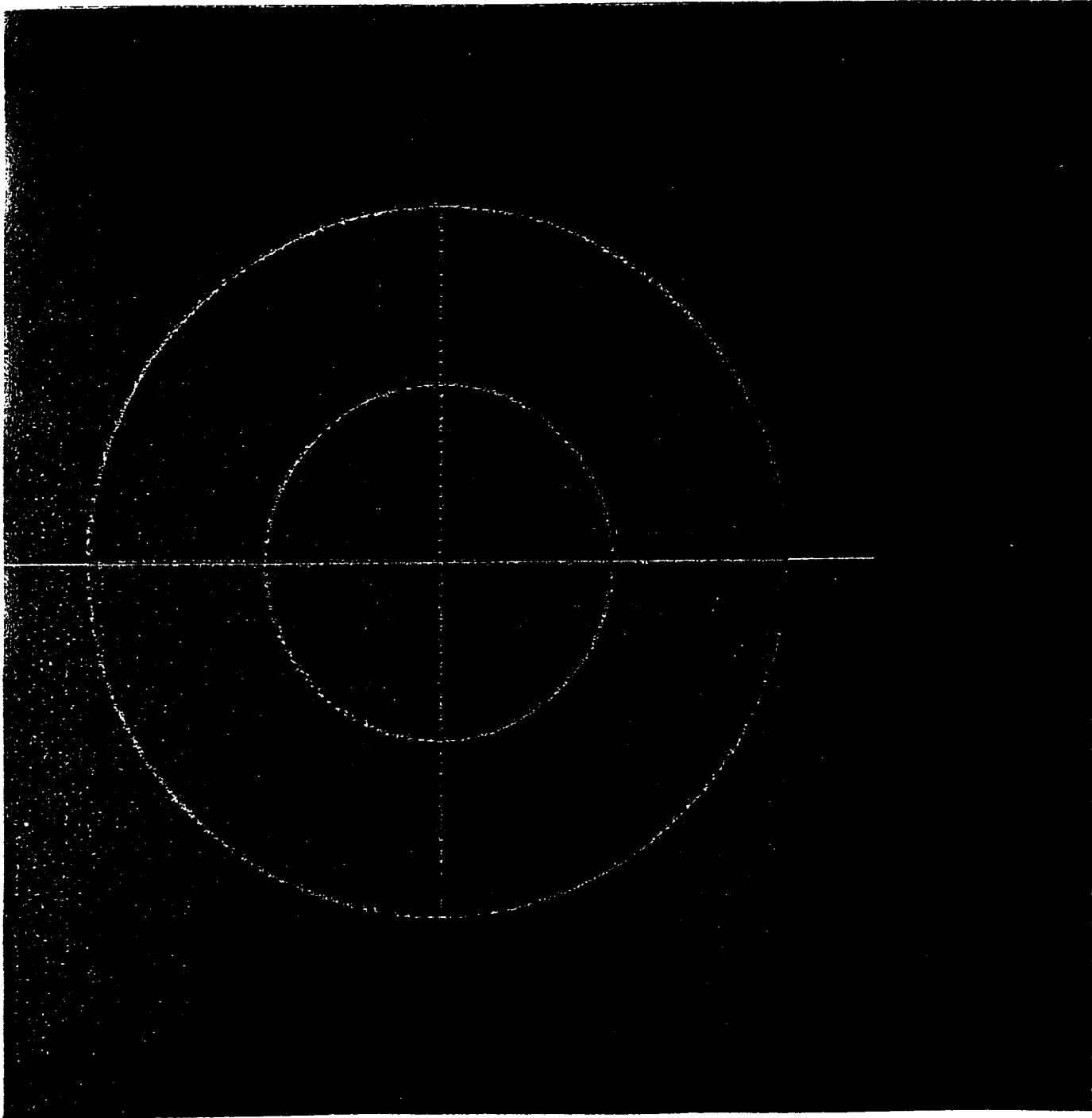


Figure 1 : Définition du maillage 1

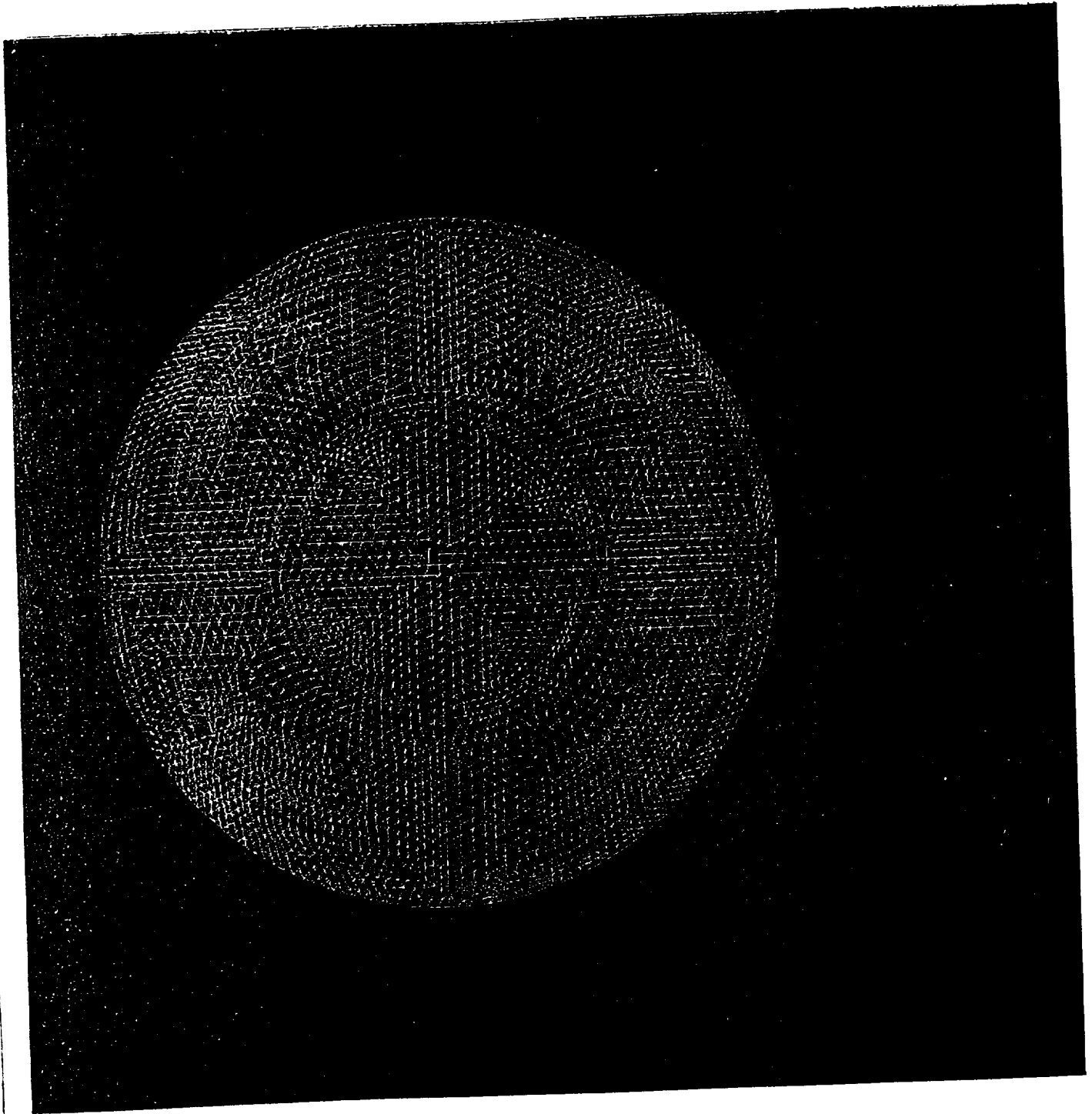


Figure 2 : Maillage 1

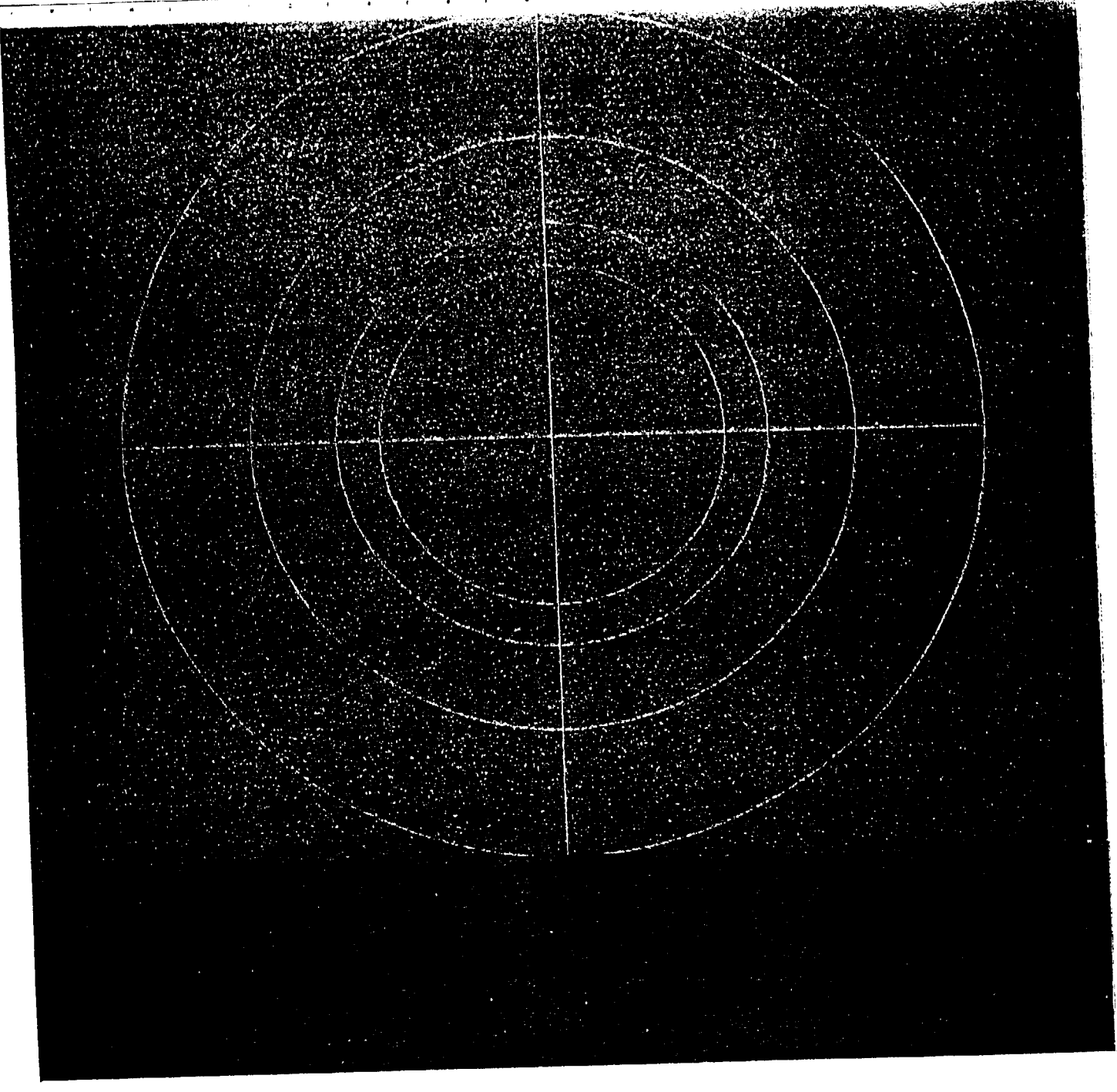


Figure 3 : Définition du maillage 2.



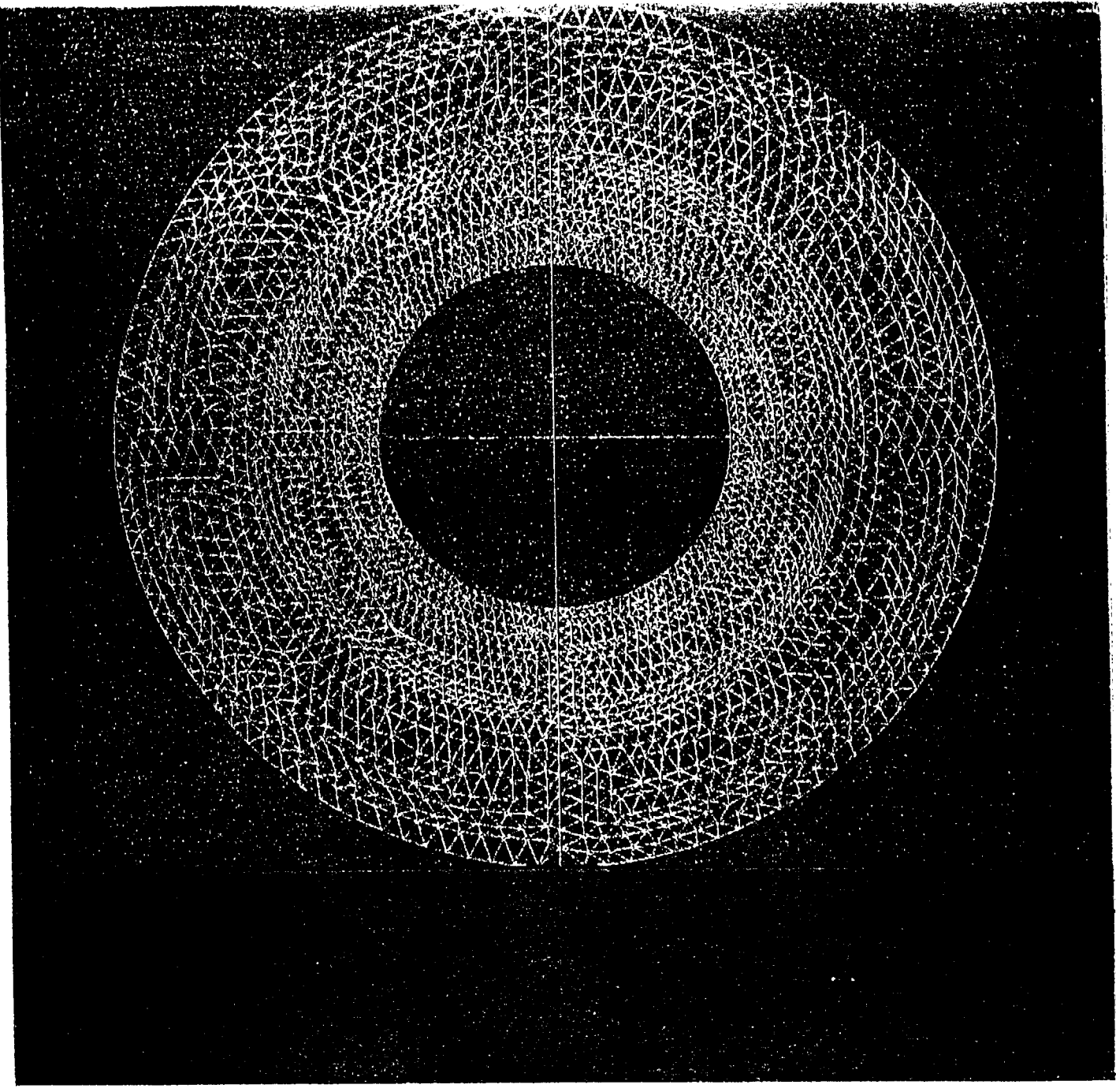


Figure 4 : Maillage 2.

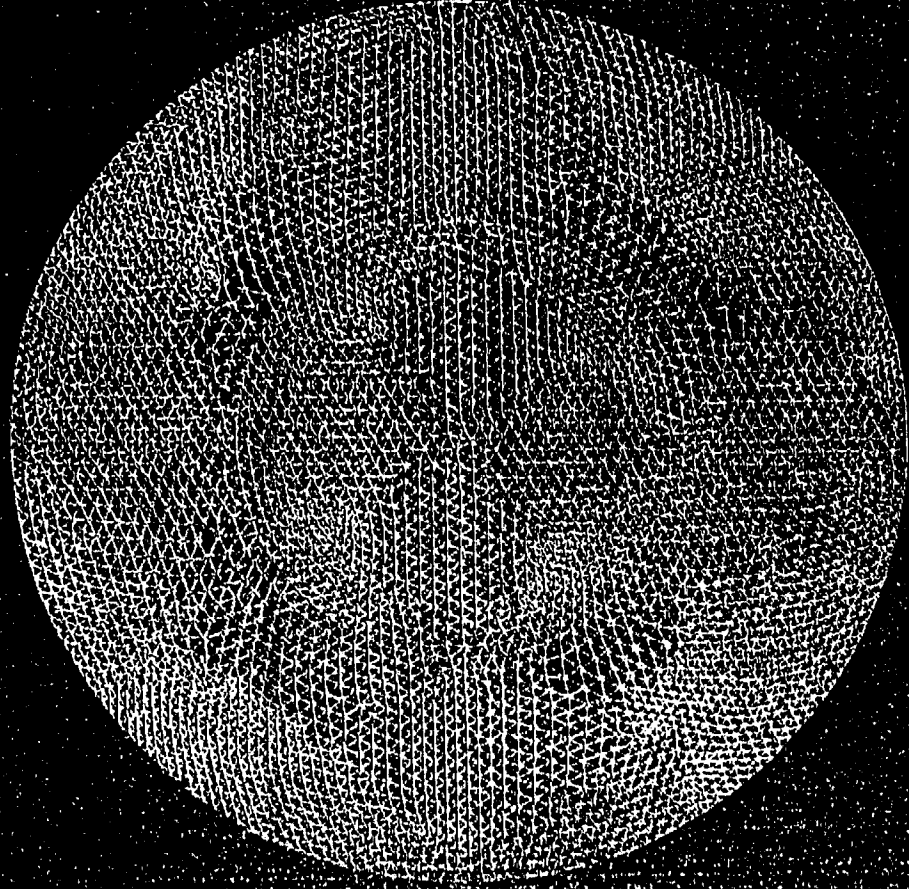


Figure 5 : Barycentrage du maillage 1.

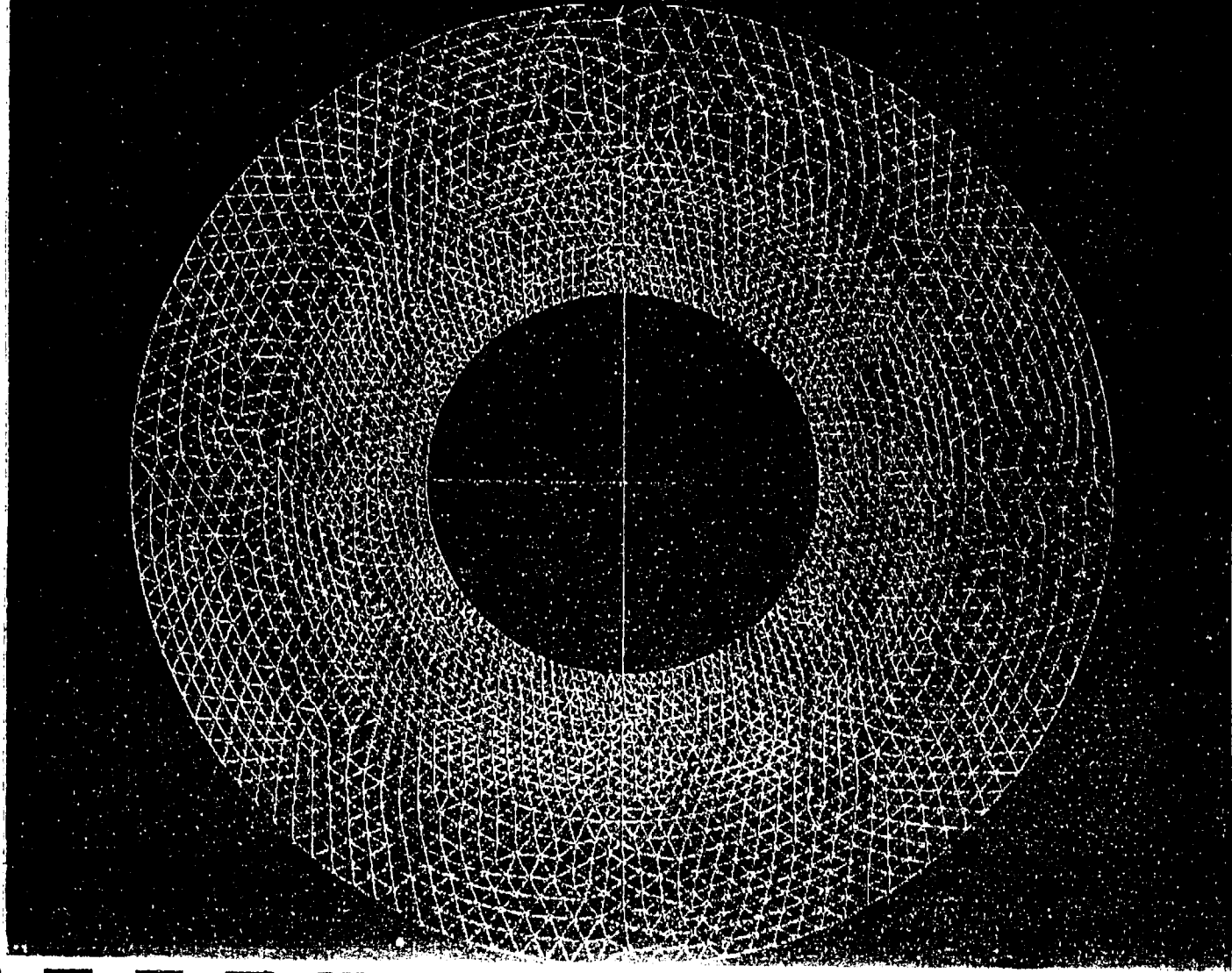


Figure 6 : Barycentrage du maillage 2.

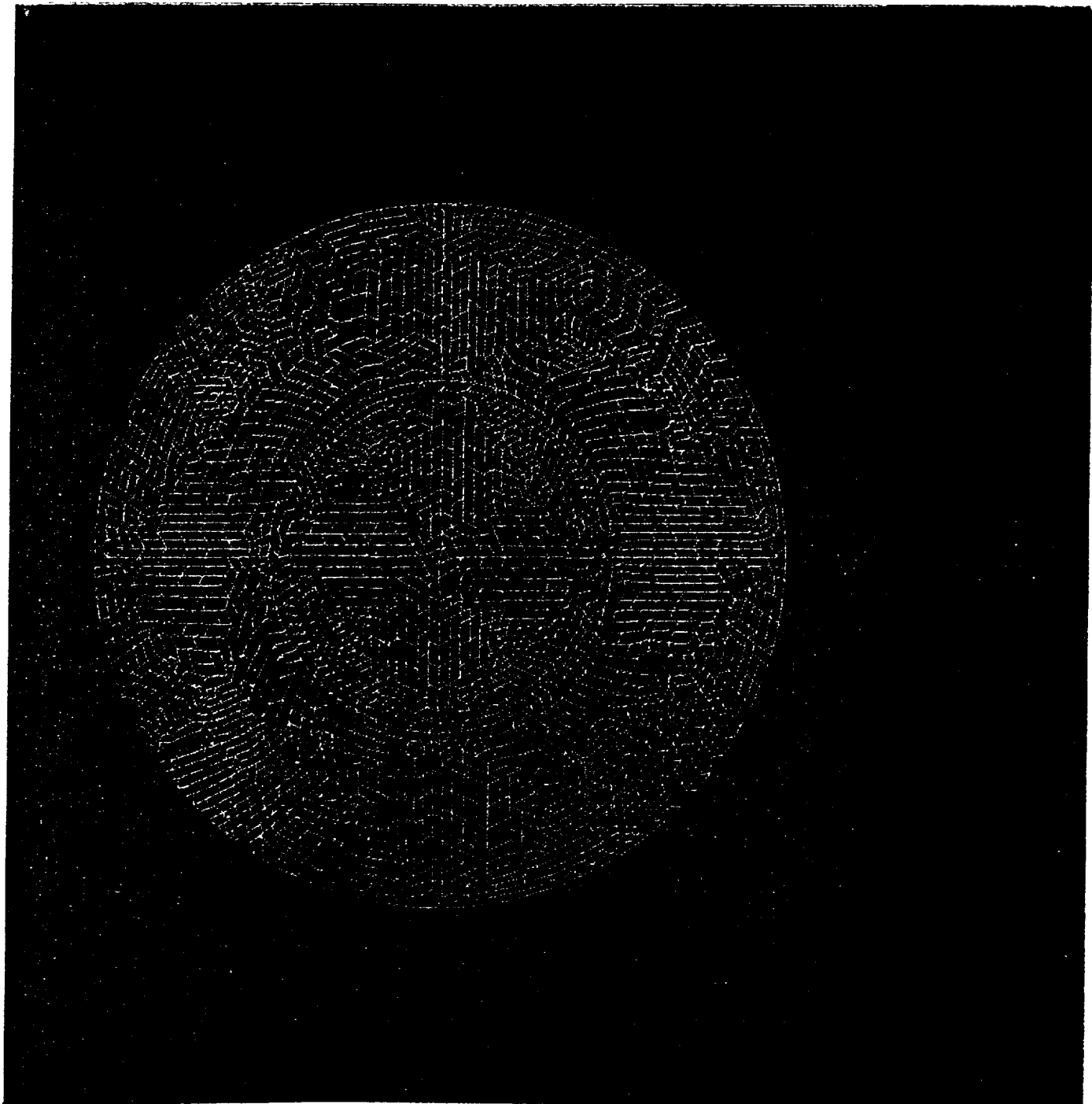


Figure 7 : Déraffinage du maillage 1.

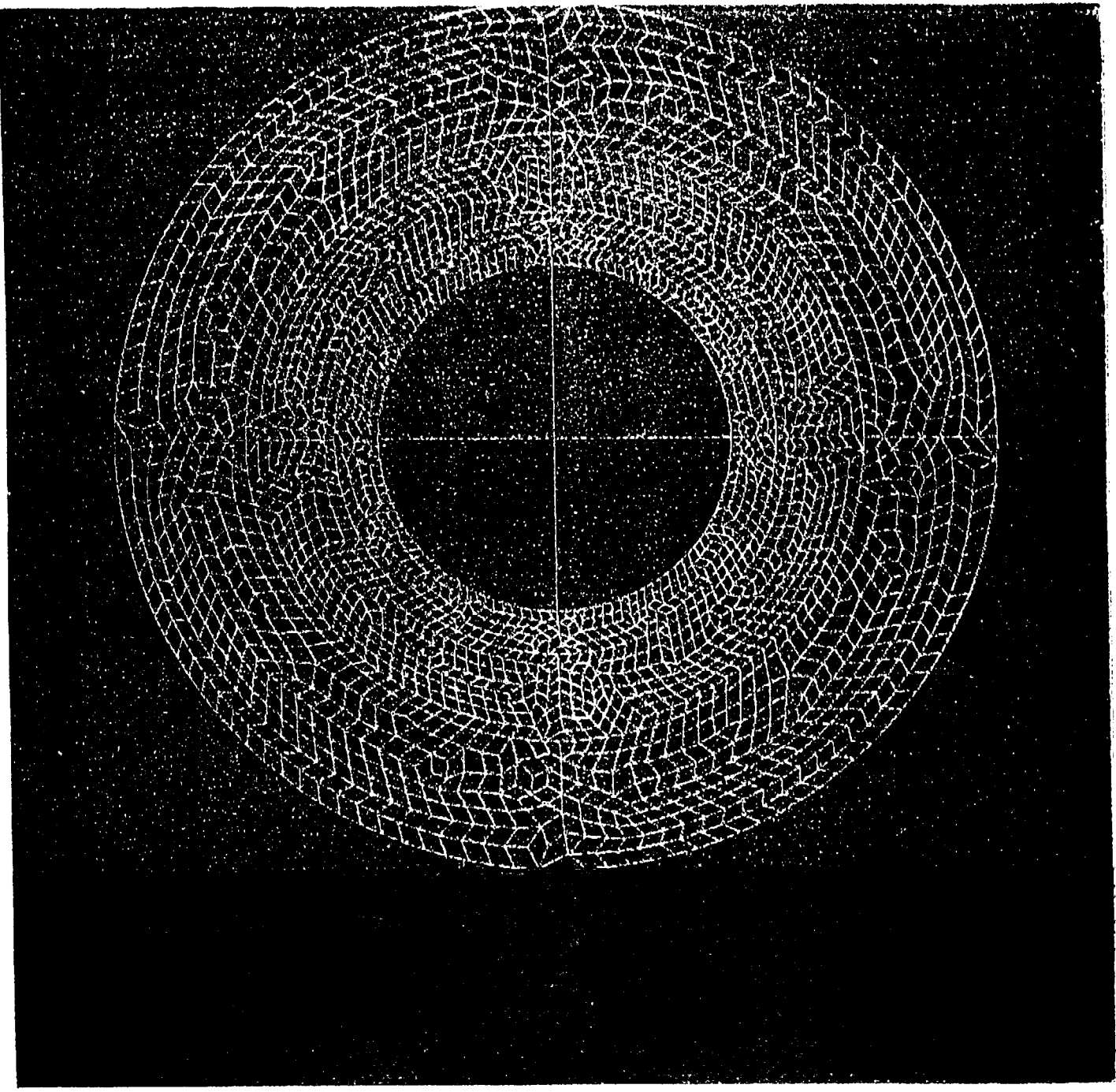


Figure 8 : Déraffinage du maillage 2.

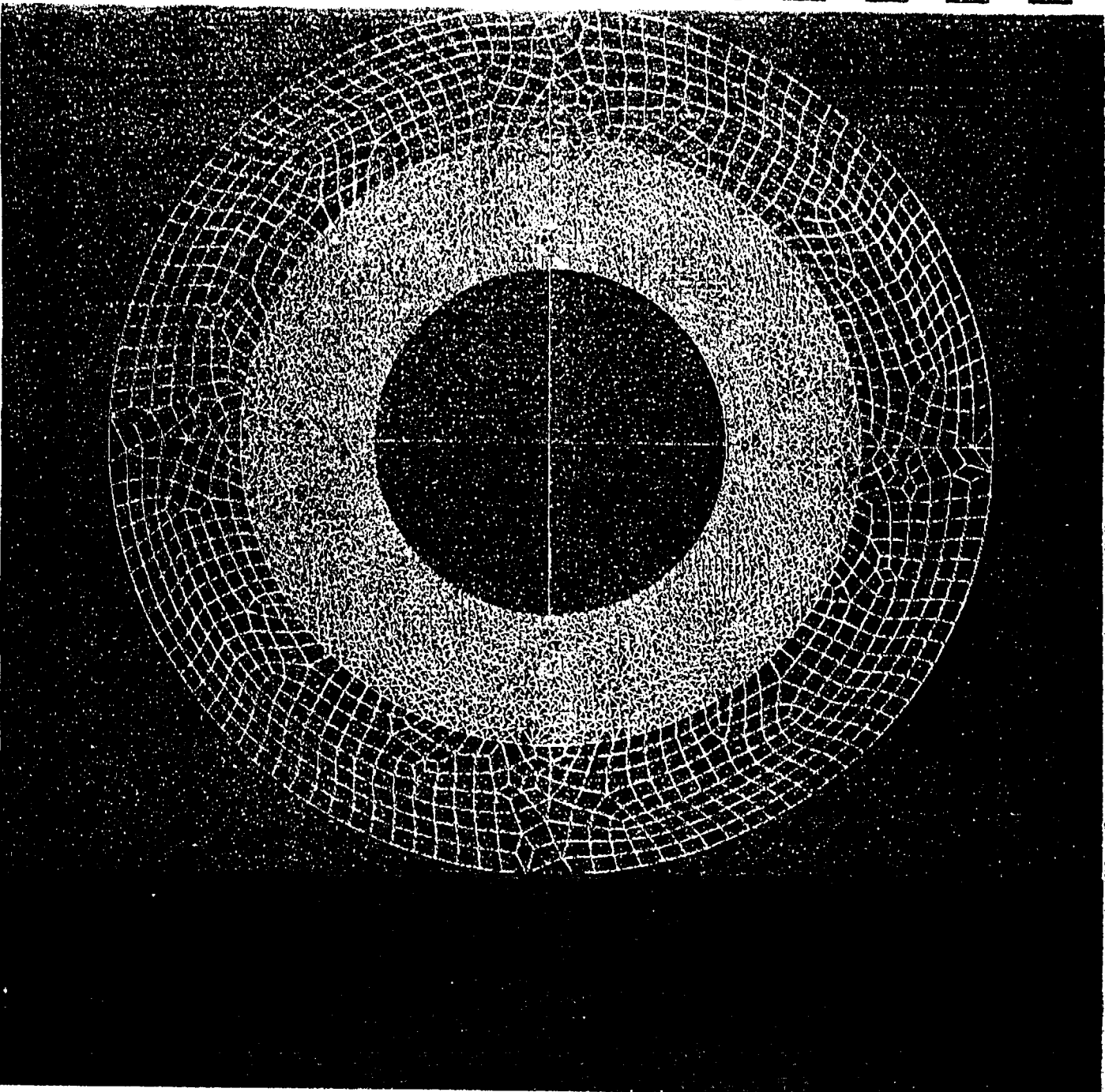


Figure 9 : Raffinage sur une partie du maillage 2.

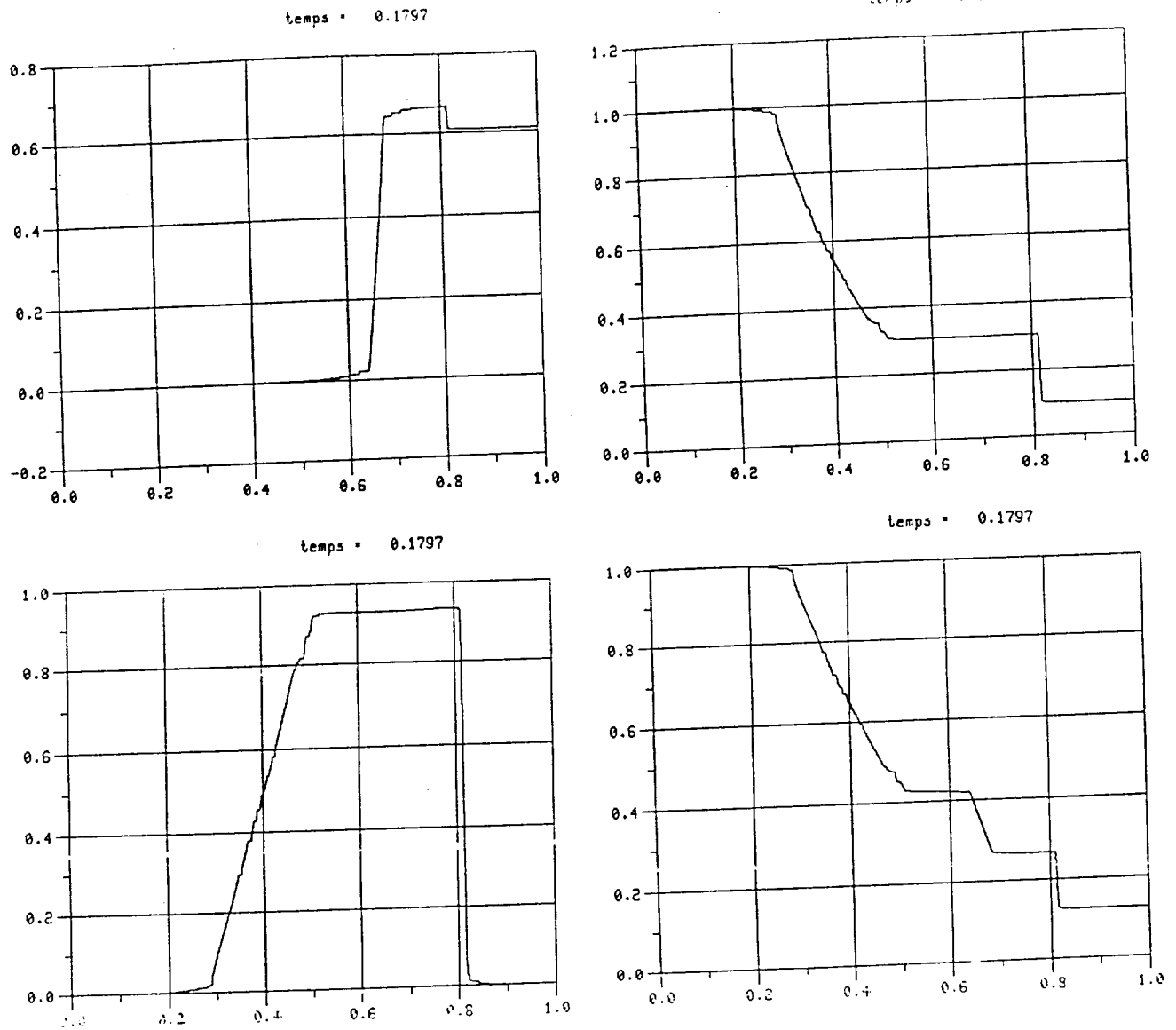


Figure 10

Tube à chocs de SOD 1D

Maillage auto-adaptatif

Initialement 50 éléments de longueur

$$dx = 2 \times 10^{-2}$$

$$T = 0.1797$$

entropie massique  $\rho$ 

densité

vitesse

pression

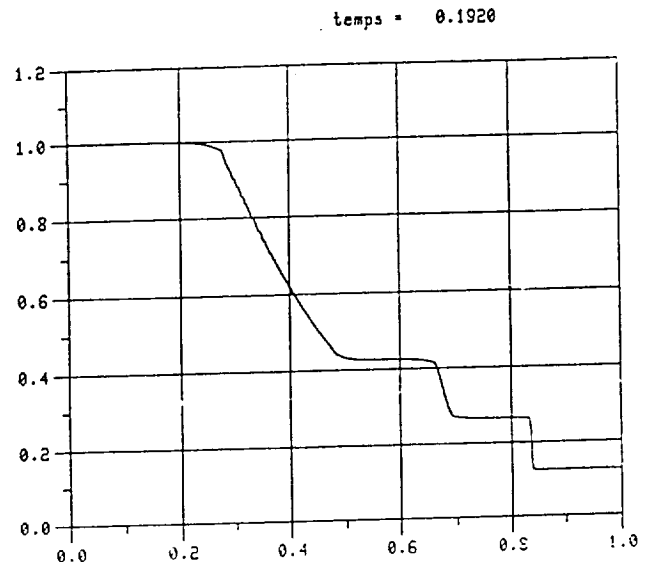
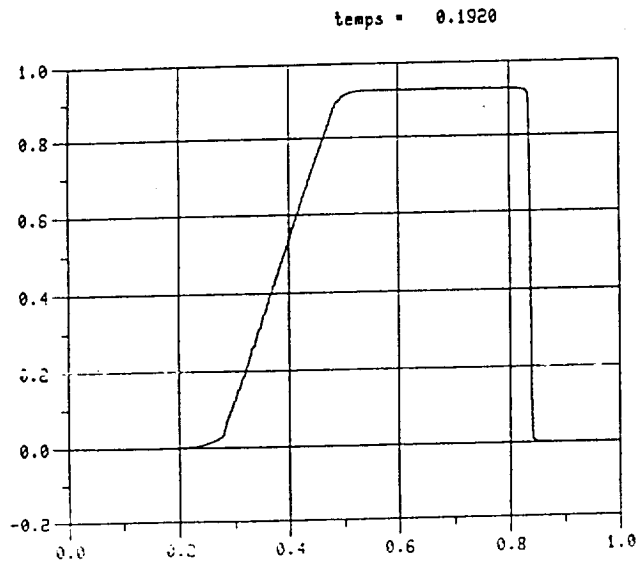
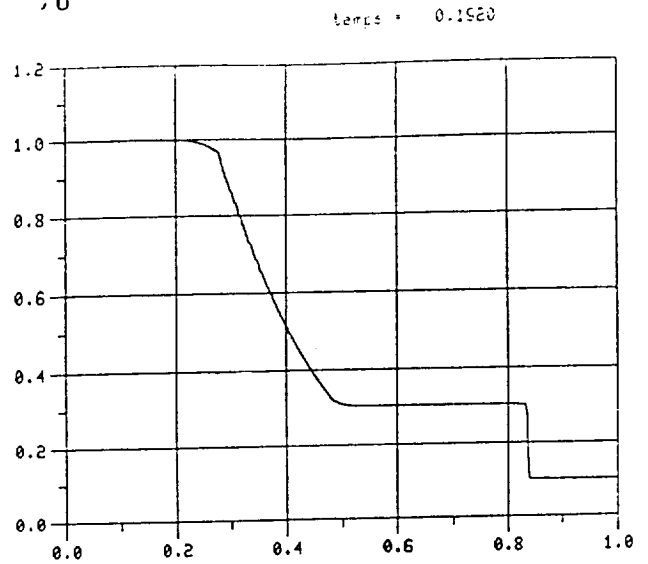
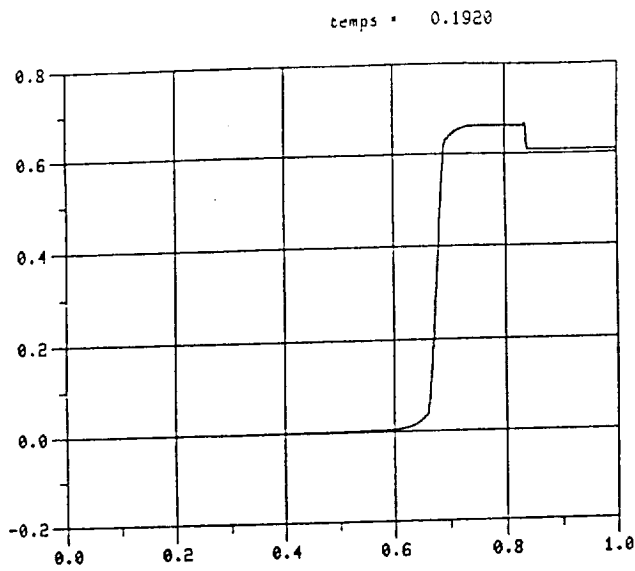


Figure 11

Tube à chocs de SOD 1D

Maillage auto-adaptatif

initialement

200 éléments de longueur

$dx = 5 \times 10^{-3}$

$T = 0.1920$

entropie massique

densité

vitesse

pression



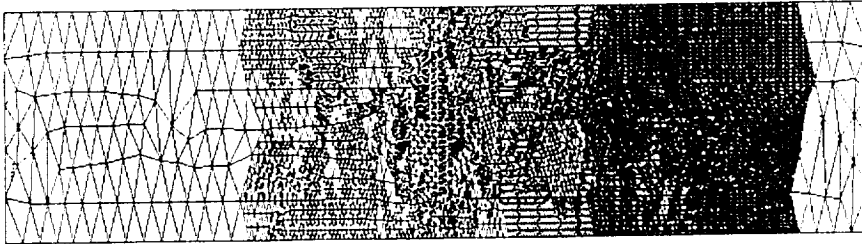


Figure 12 : Tube à chocs de SOD <<2-D>> en cours de raffinage.

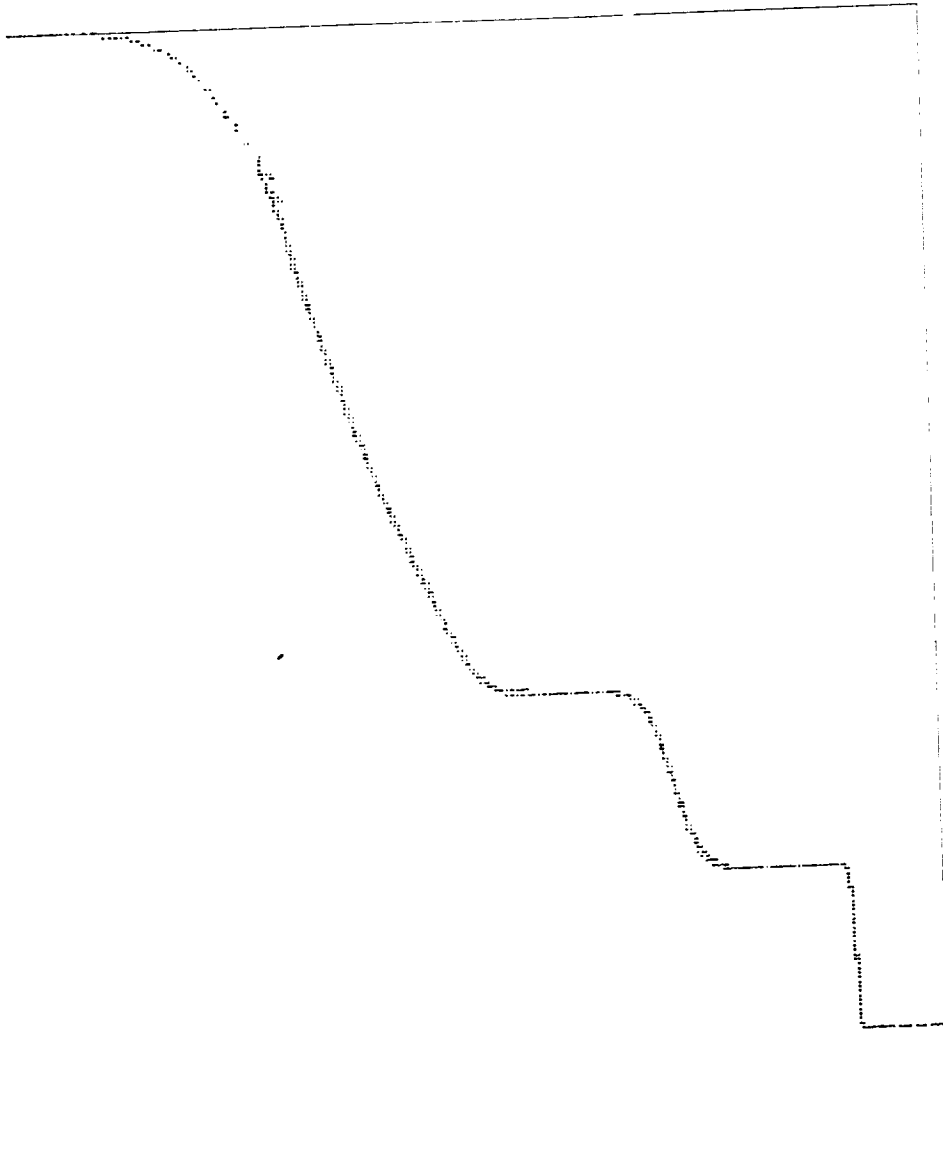


Figure 13 : Tube à chocs de SOD  
densité  $\rho$  au temps 0.2

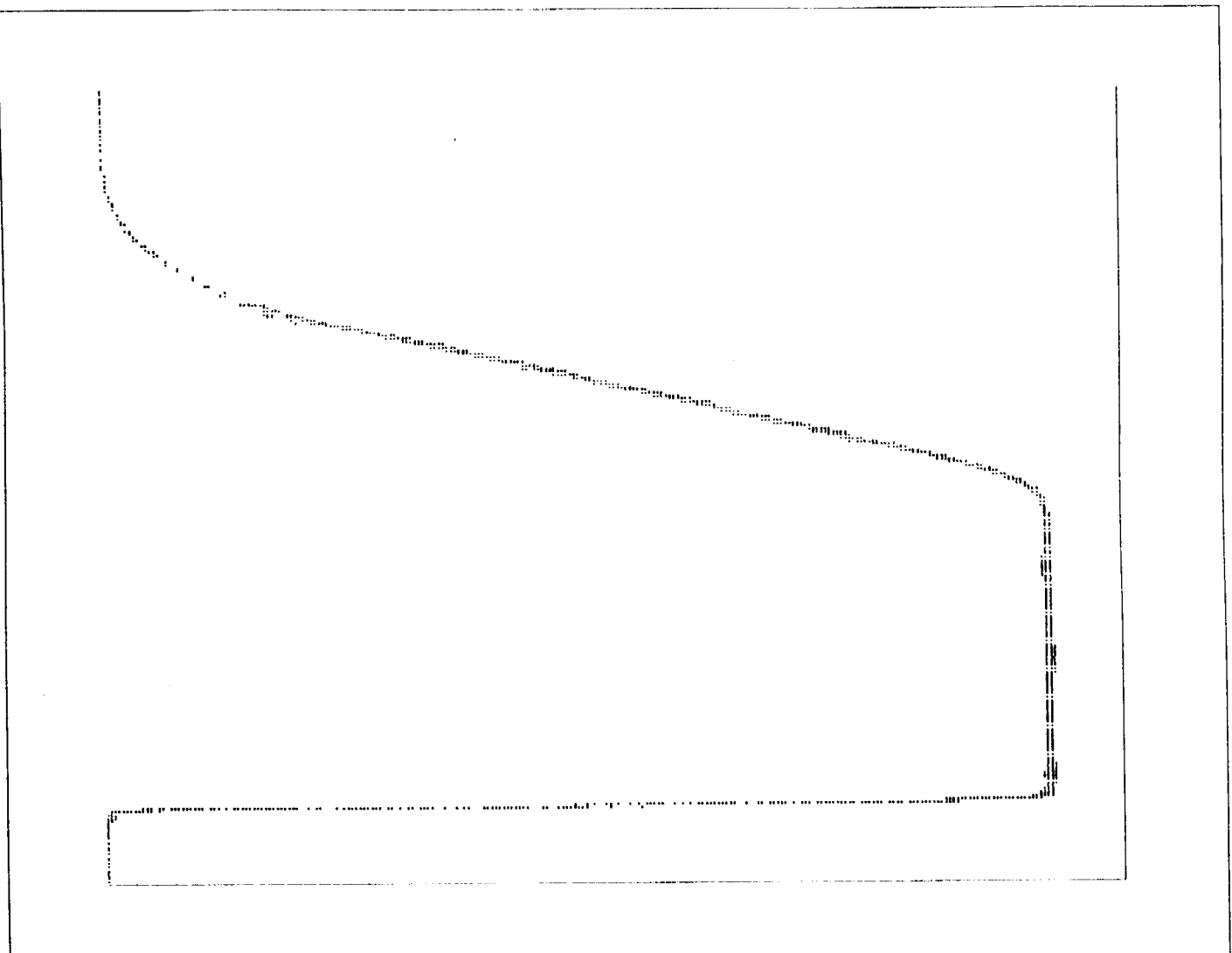


Figure 14 : Tube à chocs de SOD <<2-D>>  
vitesse  $u$  à  $T = 0.2$

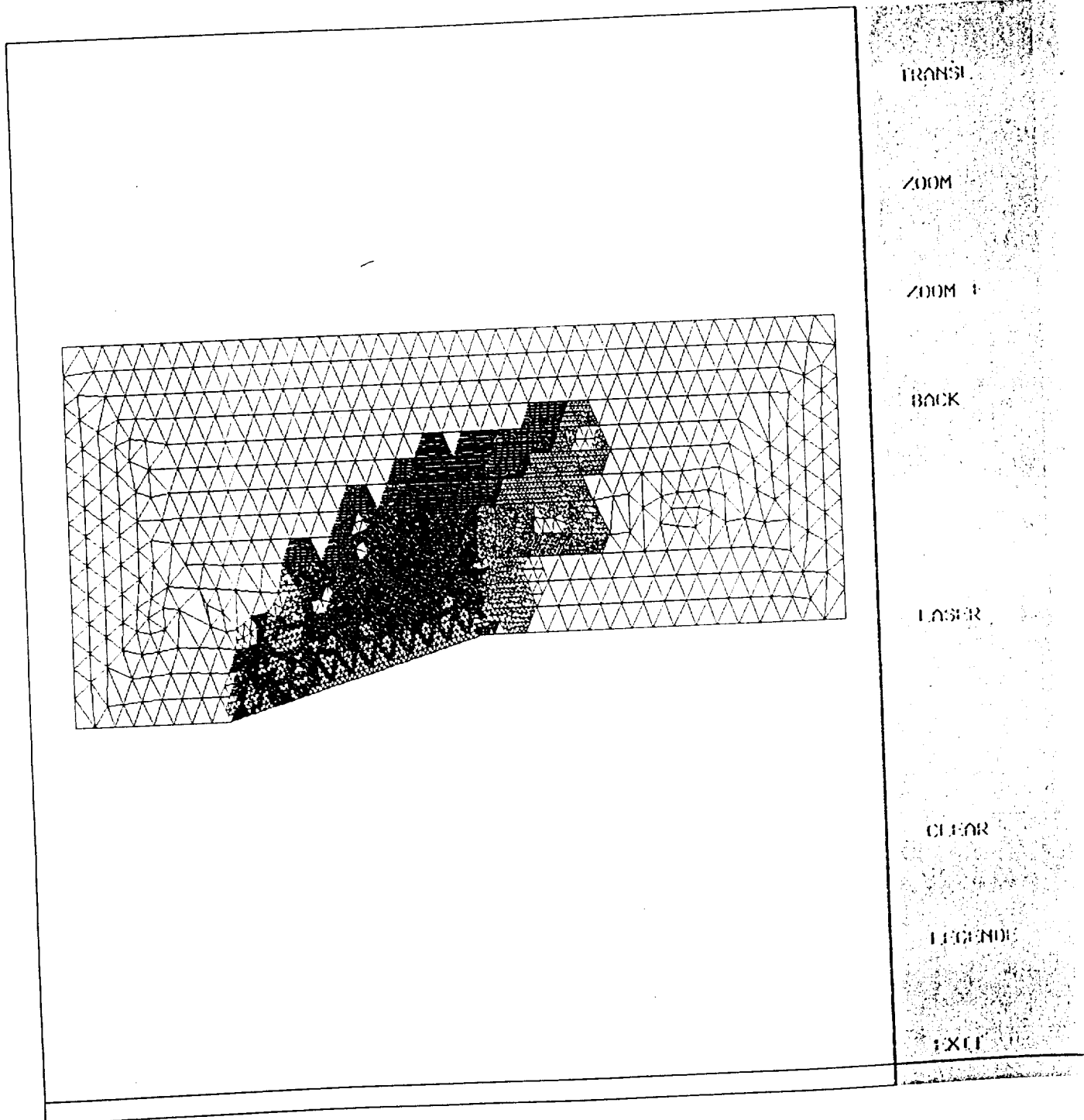


Figure 15 : La rampe inclinée à  $M_\infty = 1.6$   
le maillage en cours de raffinement  $t = 0.5$

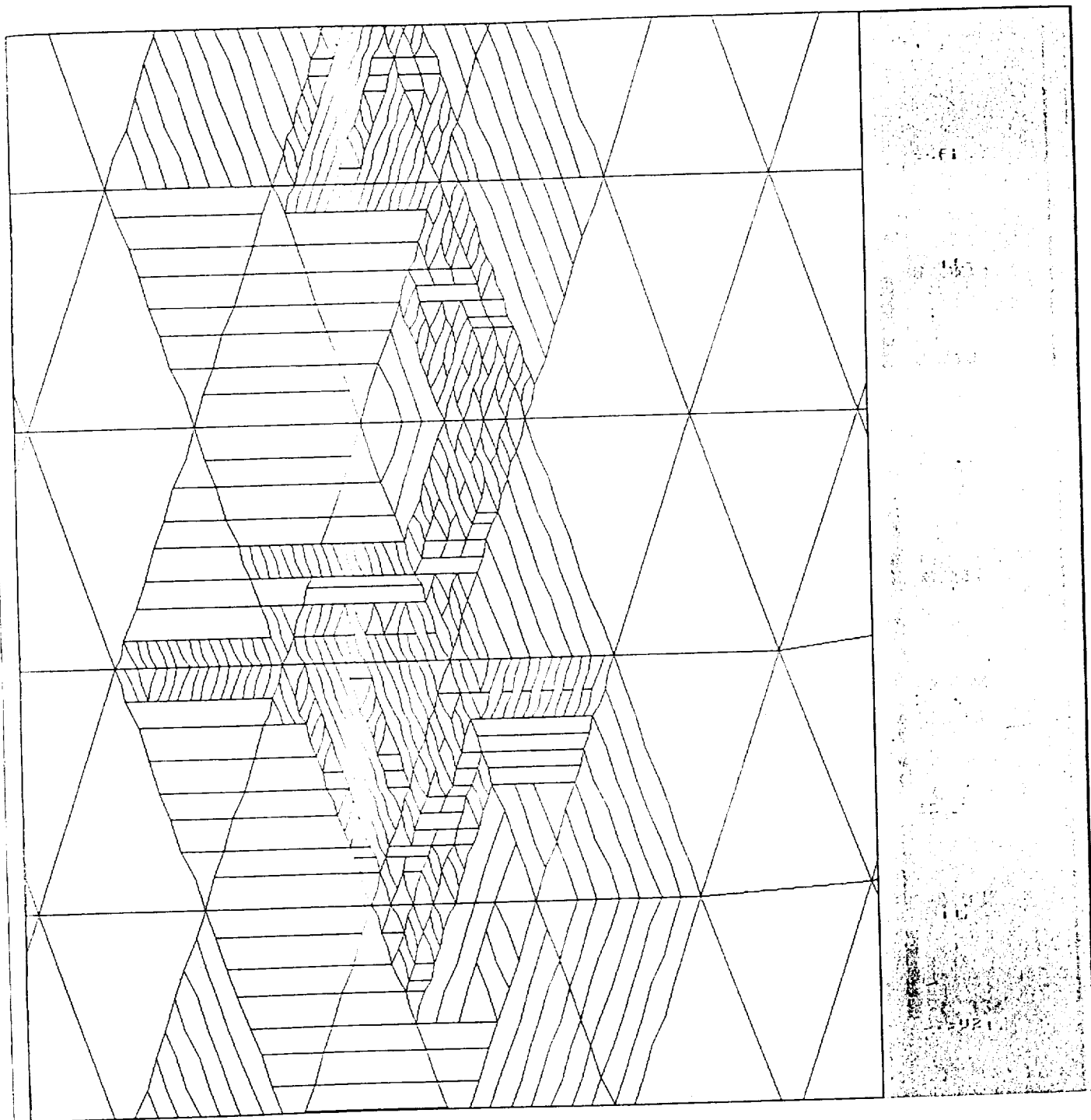
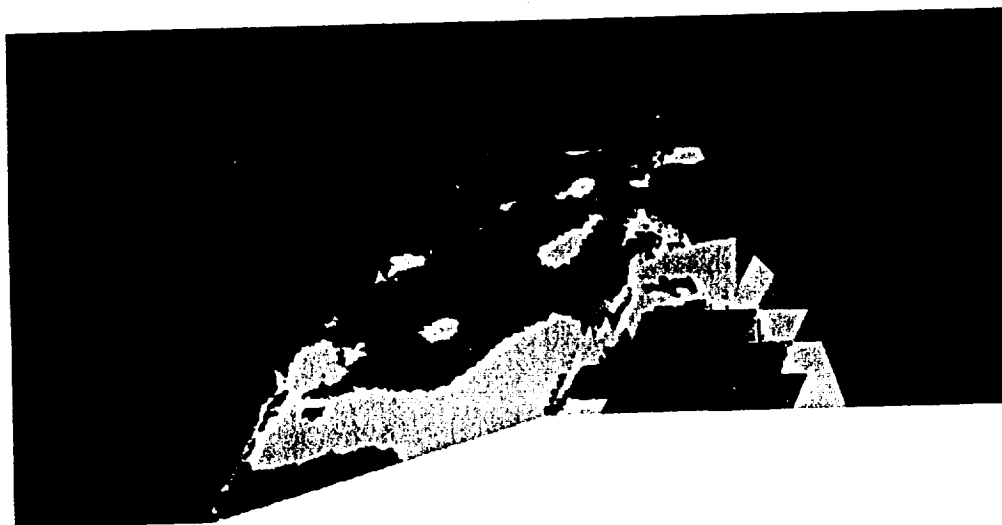


Figure 16 : La rampe inclinée  
Focalisation sur la zone raffinée.



-0.305

-0.310

-0.315

-0.319

-0.324

-0.328

-0.333

-0.338

Figure 17 : Rampe inclinée  $M_\infty = 1.6$

lignes iso-entropie au temps  $t = 0,5$

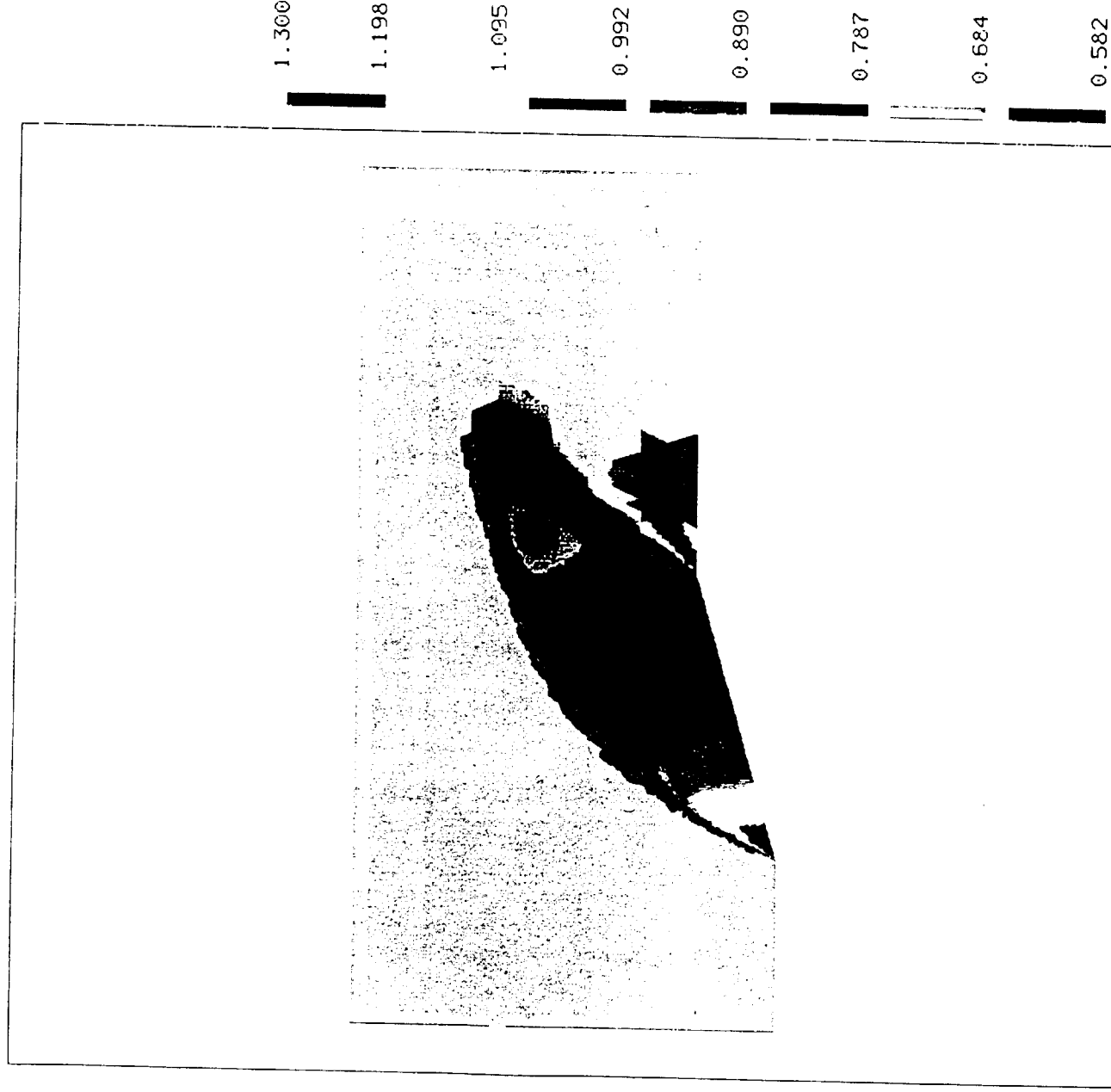


Figure 17 : Rampe inclinée  $M_\infty = 1.6$   
lignes iso-pressure à  $t = 0,5$

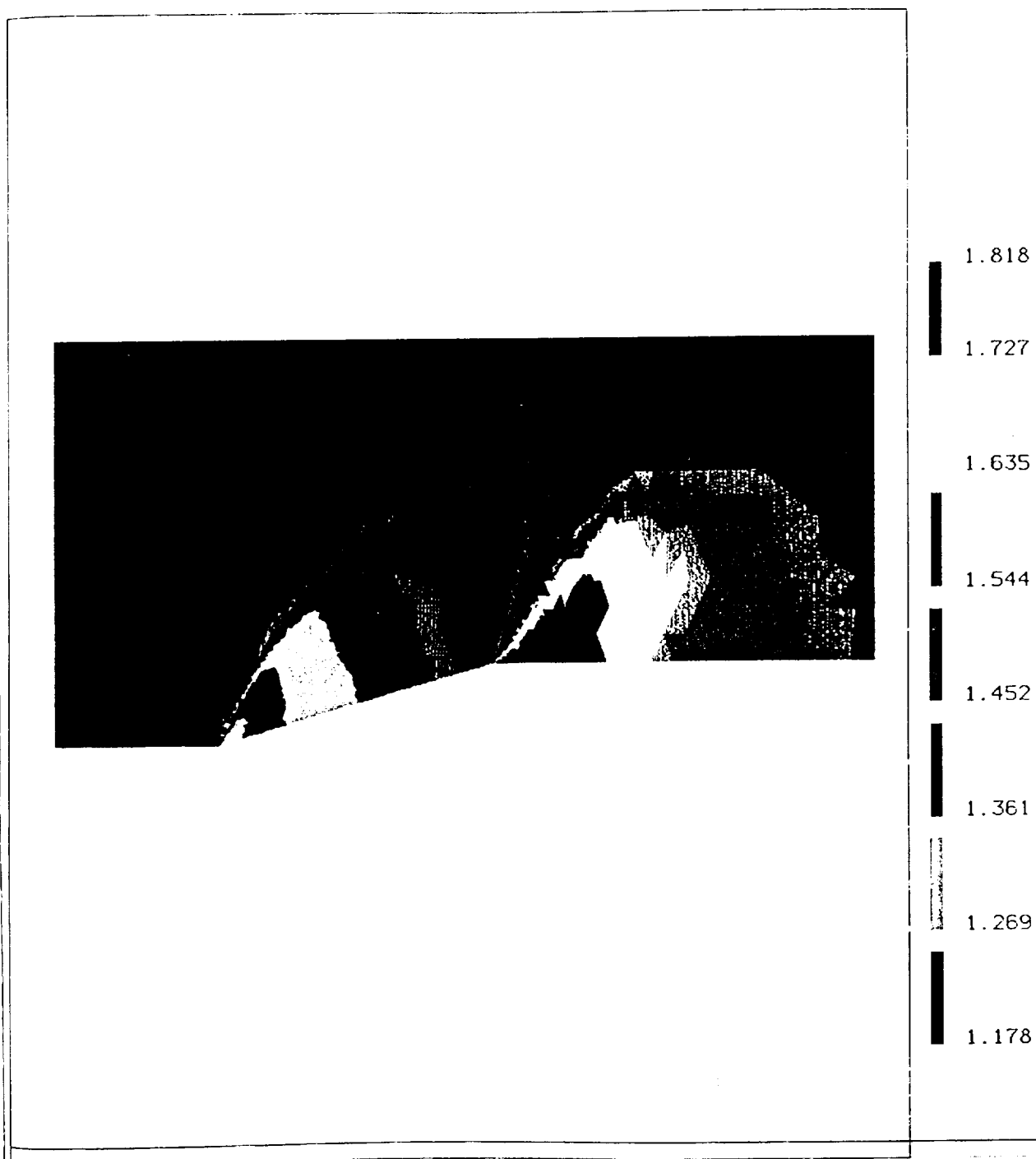


Figure 18 : Rampe inclinée  $M_\infty = 1.6$   
lignes iso-Mach à  $t = 0.5$



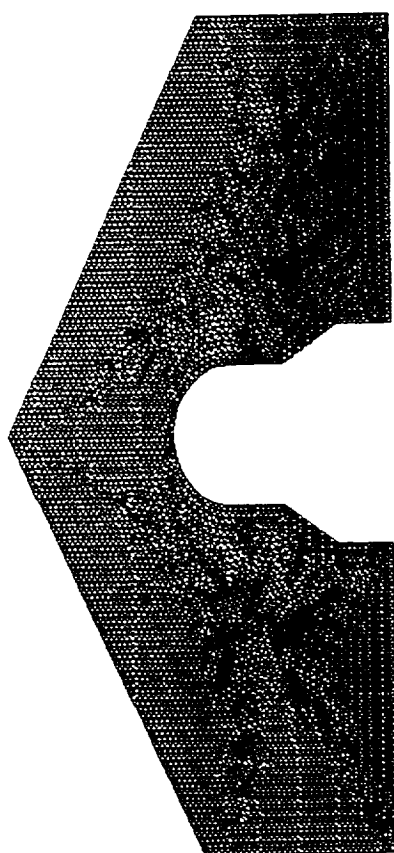


Figure 19 : Corps de rentrée "axisymétrique" (2D)  
 $M_\infty = 8$ . Maillage initial

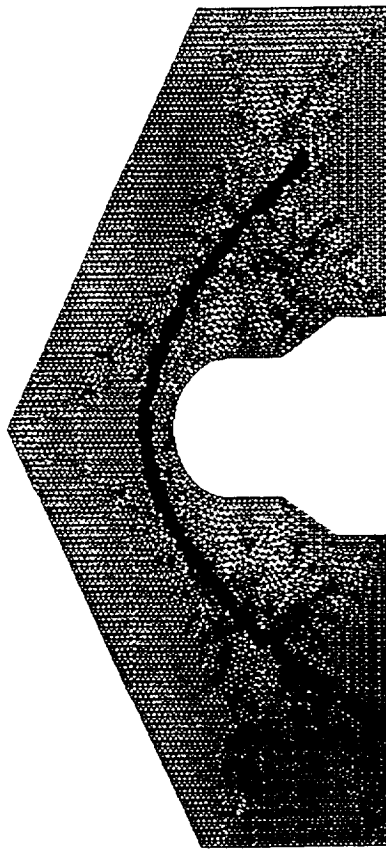


Figure 20 : Corps de rentrée 2D  $M_\infty = 8$ .  
incidence  $2^\circ$   
Maillage adapté à  $t = 4.2$

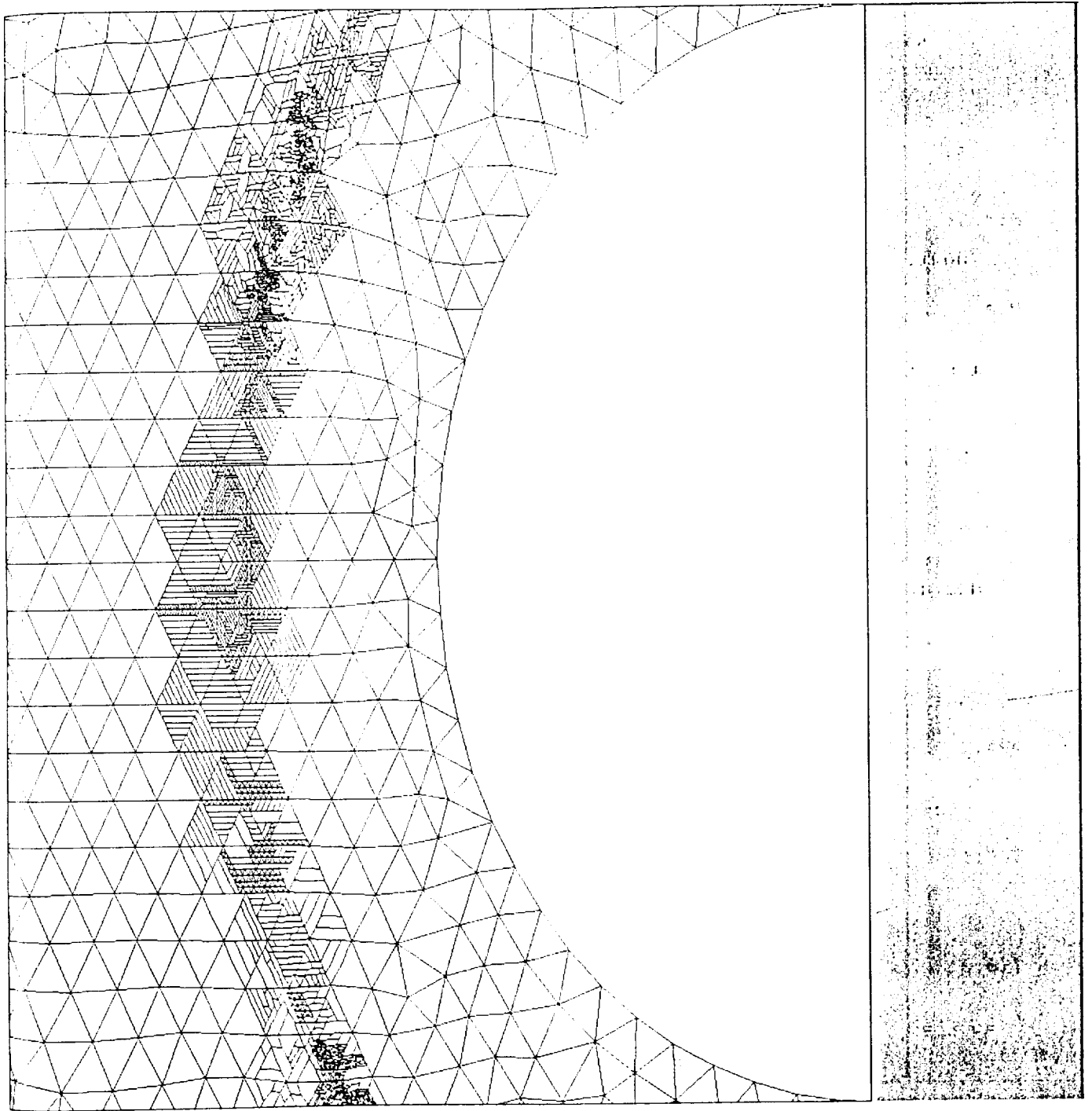


Figure 21 : Corps de rentrée 2D  $M_\infty = 8$ .

incidence  $2^\circ$

Focalisation sur la zone raffinée (choc détaché)

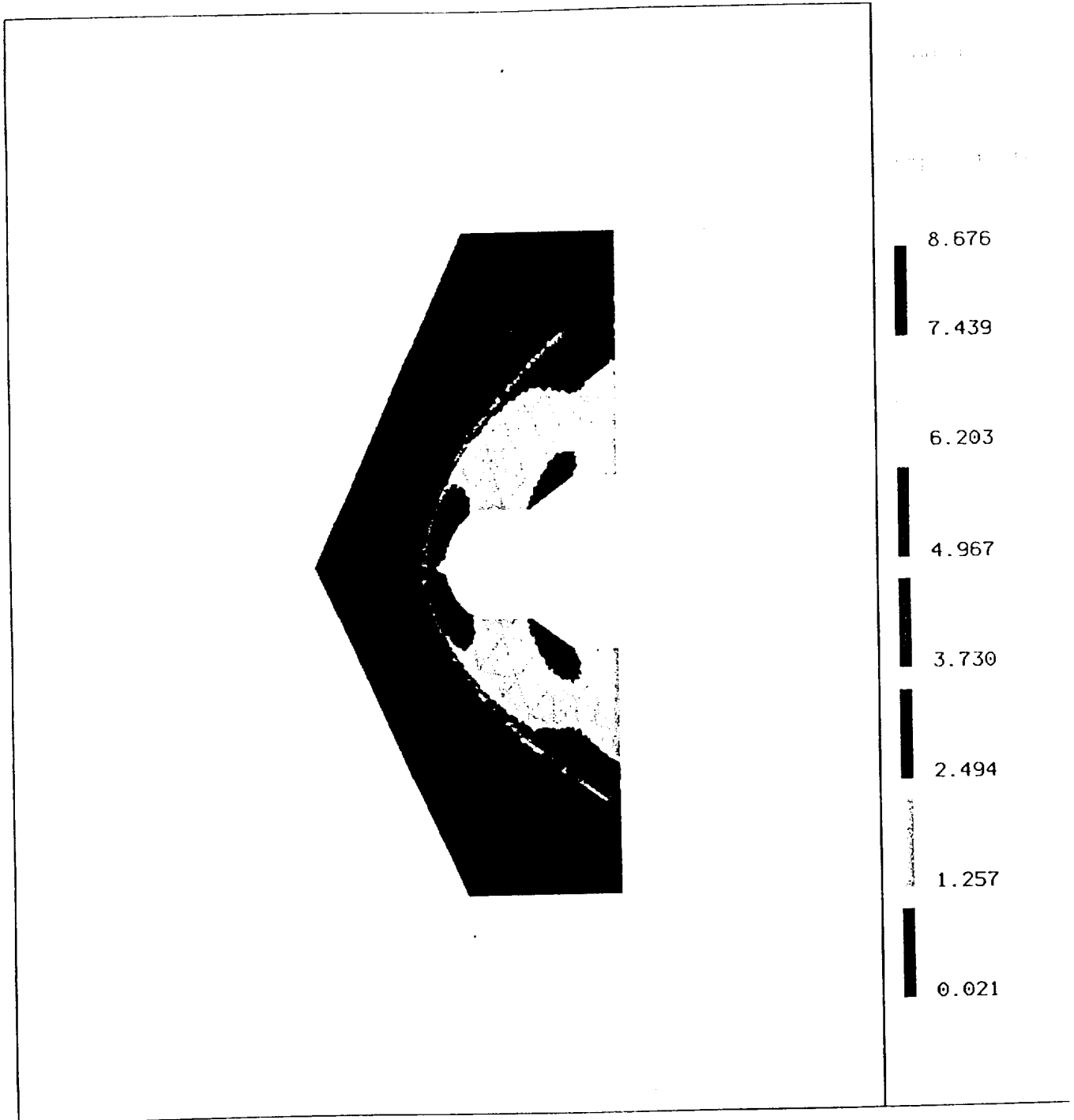


Figure 22 : Lignes iso-Mach sur le corps de rentrée 2D  
 $M_\infty = 8.$ , incidence  $2^\circ$ ,  $t = 4.216$

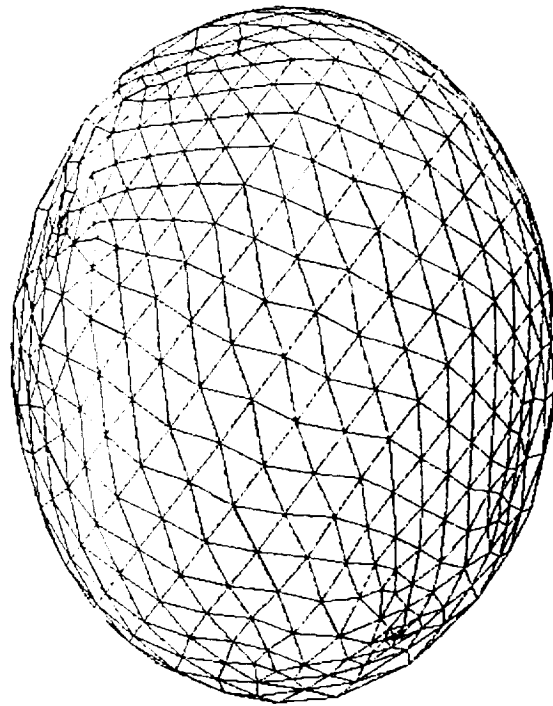
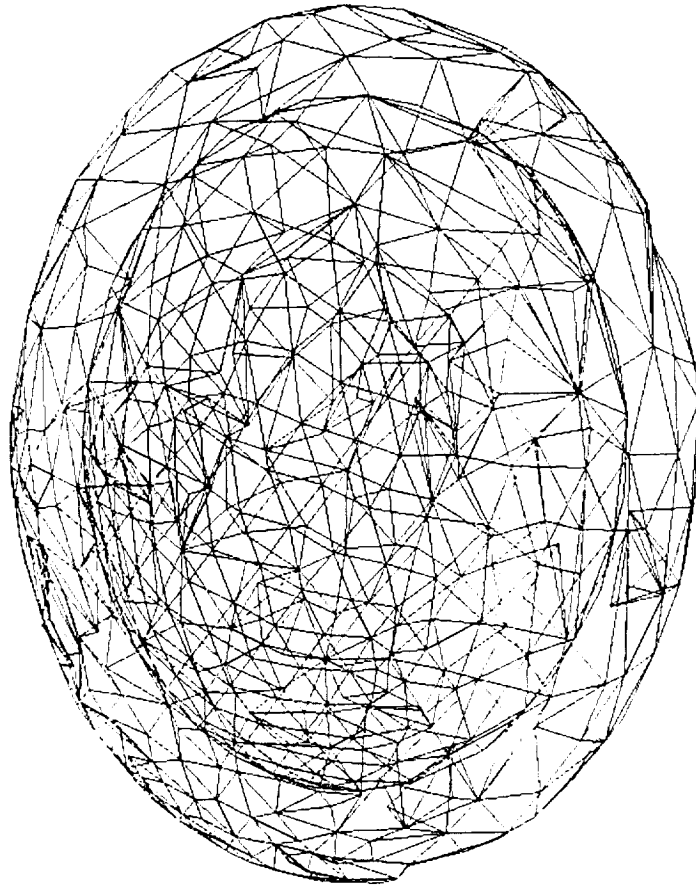


Figure 23 : Maillage surfacique sur une sphère (préliminaire au 3-D)

Figure 24 : Construction d'une "couche" d'éléments 3D autour d'une sphère.



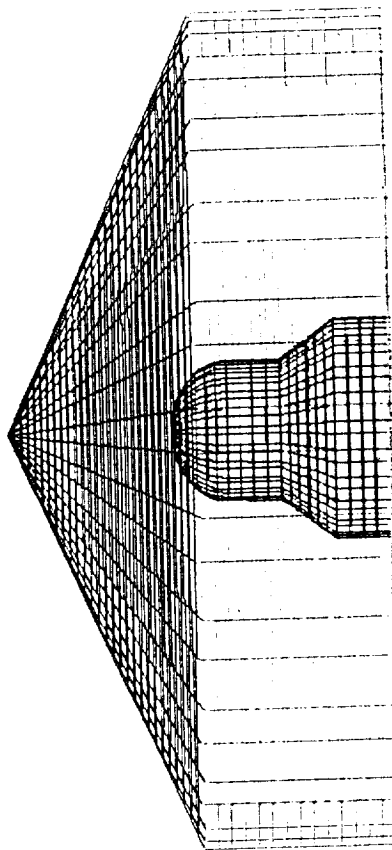


Figure 25 : L'objet 3D  
Maillage (en projection orthogonale)  
- tracé des faces frontières -